Testování změny polohy bodu

Projekt z geodézie

Tomáš Kubín

Katedra geodézie a pozemkových úprav, FSv, ČVUT v Praze

listopad 2009

Obsah

Testování střední hodnoty

Cíl

Určení objektivního kritéria podle kterého je možné provést rozhodnutí se zvoleným rizikem.

Předpoklady

souřadnice porovnávaných bodů jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením

$$\mathbf{x}_i^{(j)} = (x_i^{(j)}, y_i^{(j)}, z_i^{(j)})^T \sim N(E(\mathbf{x}_i^{(j)}), \mathbf{\Sigma}_i^{(j)})$$

$$\Delta\mathbf{x}_i^{(j,k)} = \mathbf{x}_i^{(k)} - \mathbf{x}_i^{(j)} \sim N(E(\mathbf{x}_i^{(k)}) - E(\mathbf{x}_i^{(j)}), \mathbf{\Sigma}_i^{(j)} + \mathbf{\Sigma}_i^{(k)})$$

Nulová a alternativní hypotéza bodu x_i

$$H_0 : \ E(\Delta\mathbf{x}_i^{(j,k)}) = \mathbf{0}$$

$$H_a : \ E(\Delta\mathbf{x}_i^{(j,k)}) \neq \mathbf{0},$$

Test apriorní a aposteriorní

Konstrukce testu

- zvolení testovací statistiky t
- určení rozdělení testovací statistiky t, když platí nulová hypotéza
- určení testovacího kritéria a kritické hodnoty pro zvolené riziko testu

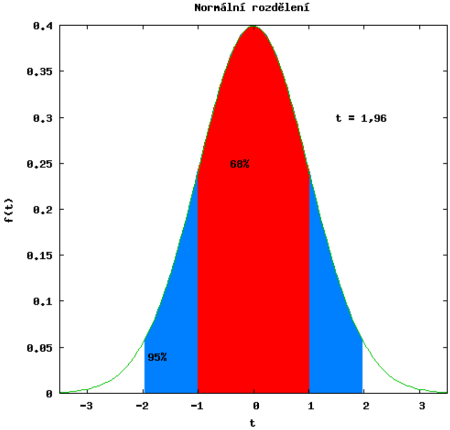
Test apriorní a aposteriorní

- na základě určení konfidenční oblasti vektoru souřadnicových rozdílů $\Delta\mathbf{x}_i^{(j,k)}$ – apriorní test
- na základě porovnání sum čtverců oprav Gauss-Markova modelu bez a s podmínkou odpovídající H_0 – test apriorní i aposteriorní

Přehled

Určení konfidenční oblasti jednorozměrné veličiny

výpočet kritické hodnoty



Testovací statistika

$$t = \frac{\Delta x_i^{(j,k)}}{\sigma_{\Delta x_i^{(j,k)}}} \sim N(0,1)$$

Kritická hodnota t_k:

$$P(|t| < t_k) = 1 - \alpha$$

$$P = 2\int_0^{t_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

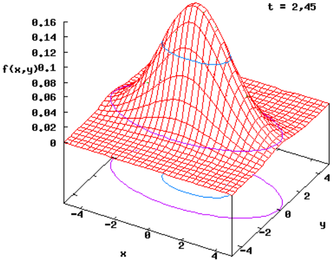
Testovací kritérium:

$|t| > t_k \;\rightarrow$ zamítáme

Výpočet hodnoty t_k zajišťuje funkce `double Normal(double alfa)` v souboru `/lib/gnu_gama/statan.h` projektu `GNU Gama`.

Přehled

Určení konfidenční oblasti dvojrozměrné veličiny



$$H_0 : \Delta\mathbf{x}_i^{(j,k)} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_i^{(j,k)})$$

$$\mathbf{\Sigma}_i^{(j,k)} = \mathbf{\Sigma}_i^{(j)} + \mathbf{\Sigma}_i^{(k)}$$

$$diag(a^2, b^2) = \mathbf{X}'\mathbf{\Sigma}_{ij}\mathbf{X}$$

$$t = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i^{(j,k)}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i^{(j,k)}}{b}\right)^2}$$

$$P = \int\int_{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2 < t_k^2} \frac{1}{2\pi ab} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]} dxdy$$

- Pravděpodobnost P se počítá jako objem eliptického válce ohraničeného plochou normálního rozdělení.

Řešení dvojného integrálu

$$P = \iint\limits_{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2<t_k^2} \frac{1}{2\pi ab} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]} dxdy$$

substituce

Zavedeme polární souřadnice

$$x = at\cos\varphi$$
$$y = bt\sin\varphi$$

Determinant Jacobiho matice

$$D = -abt$$

Řešení dvojného integrálu

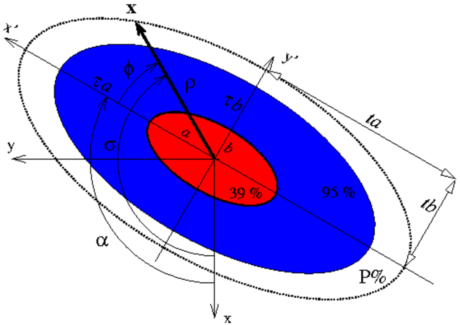
$$P = 4\int_0^{t_k}\int_0^{pi/2}\frac{t}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}t^2}d\varphi dt = \int_0^{t_k} te^{-\frac{1}{2}t^2} =$$

$$= \left[-e^{-\frac{1}{2}t^2}\right]_0^{t_k} = 1 - e^{-\frac{1}{2}t_k^2}$$

Výsledek

$$t_k = \sqrt{-2\ln(1-P)}$$

Grafická interpretace testovací statistiky



- a, b, α: parametry střední elipsy chyb vektoru **x**
- ρ, σ: délka a směrník vektoru **x** v nečárkované soustavě
- potom

$$\phi = \sigma - \alpha$$
$$x' = \rho \cos \phi$$
$$y' = \rho \sin \phi$$

- a z toho plyne

$$t = \sqrt{\left(\frac{\rho \cos \phi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\rho \sin \phi}{b}\right)^2}$$

Přehled

Určení konfidenční oblasti trojrozměrné veličiny

Bod v prostoru

$$\Delta x_i^{(j,k)} = (\Delta x_i^{(j,k)}, \Delta y_i^{(j,k)}, \Delta z_i^{(j,k)})^T$$

$$t = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i^{(j,k)}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i^{(j,k)}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z_i^{(j,k)}}{c}\right)^2}$$

$$P = \iiint\limits_{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2 < t_k^2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}abc} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\right]} dxdydz$$

Řešení trojného integrálu

$$P = \iiint\limits_{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2<t_k^2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}abc} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\right]} dxdydz$$

substituce

Zavedeme polární souřadnice

$$x = at\cos\varphi\cos\lambda$$
$$y = bt\sin\varphi\sin\lambda$$
$$z = ct\sin\varphi$$

Determinant Jacobiho matice

$$D = -abct^2\cos\varphi$$

Řešení trojného integrálu

$$P = 8\int_0^{t_k}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}abc}e^{-\frac{t^2}{2}}abct^2\cos\varphi\, dt d\varphi d\lambda =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{t_k} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

řešení integrálu $\int_0^{t_k} t^2 e^{-t^2/2}dt$ per-partes

$$f(x) = t,\quad f'(x) = 1,\quad g(x) = -e^{-t^2/2},\quad g'(x) = te^{-t^2/2}$$

$$\int_0^{t_k} t^2 e^{-t^2/2}dt = -t_k e^{-t_k^2/2} + \int_0^{t_k} e^{-t^2/2}dt$$

Řešení trojného integrálu

Chybová funkce (error function)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

substituce $u = t/\sqrt{2},\ t = \sqrt{2}u,\ dt = \sqrt{2}du$

$$\int_0^{t_k} e^{-t^2/2} dt = \int_0^{t_k/\sqrt{2}} e^{-u^2} \sqrt{2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{t_k}{\sqrt{2}}\right)$$

$$P = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{t_k} e^{-t^2/2} dt - \sqrt{\frac{2}{\pi}} t_k e^{-t_k^2/2} =$$

$$= \operatorname{erf}\left(\frac{t_k}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} t_k e^{-t_k^2/2}$$

Řešení trojného integrálu

řešení rovnice iterací

$$P = \operatorname{erf}\left(\frac{t_k}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, t_k e^{-t_k^2/2}$$

$$e^{-t_k^2/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2t_k^2}}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{t_k}{\sqrt{2}}\right) - P\right)$$

$$t_k = \sqrt{-2\ln\left(\sqrt{\frac{\pi}{2t_k^2}}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{t_k}{\sqrt{2}}\right) - P\right)\right)}$$

startovací hodnota $t_{k(0)} = 2\,\operatorname{erfinv}(P)$

$$t_{k(i+1)} = \sqrt{-2\ln\left(\sqrt{\frac{\pi}{2t_{k(i)}^2}}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{t_{k(i)}}{\sqrt{2}}\right) - P\right)\right)}$$

Přehled

Gauss-Markův model s podmínkou

Definice modelu

$$E(\mathbf{y}) = \mathbf{A_{m\times n}x}, \qquad D(\mathbf{y}) = \sigma_0^2\mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{H}_{p\times n}x = \mathbf{h}$$

$\mathbf{y} \in R^m$	vektor měření
$\mathbf{A}$	matice plánu, $h(\mathbf{A}) = q < n$
$\mathbf{x} \in R^n$	vektor neznámých
$D(\mathbf{y})$	kovarianční matice
σ_0^2	jednotková variance
$\mathbf{P}$	matice vah
$\mathbf{H}$	matice podmínek, $h(\mathbf{H}) = p < n$
$\mathbf{h} \in R^p$	vektor absolutních členů podmínek

Odhady parametrů

Odhady bez podmínky

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^-\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{y} \qquad D(\hat{\mathbf{x}}) = \sigma_0^2(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^-$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^-\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{y} \qquad D(\hat{\mathbf{y}}) = \sigma_0^2\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^-\mathbf{A}^T$$

Odhady s podmínkou

$$\hat{\mathbf{x}}_h = \hat{\mathbf{x}} - (\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^-\mathbf{H}^T\left(\mathbf{H}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^-\mathbf{H}^T\right)^{-1}(\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{h})$$

$$\hat{\mathbf{y}}_h = \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^-\mathbf{H}^T\left(\mathbf{H}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^-\mathbf{H}^T\right)^{-1}(\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{h})$$

Suma čtverců oprav

model bez podmínky

$$
\begin{aligned}
RSS &= \mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v} = (\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}})^T\,\mathbf{P}\,(\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}})\\
\hat{\sigma}_0^2 &= RSS/(m-n)
\end{aligned}
$$

model s podmínkou

$$
\begin{aligned}
RSS_h &= (\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}}_h)^T\,\mathbf{P}\,(\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}}_h) =\\
&= RSS + (\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{h})^T\left(\mathbf{H}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^-\mathbf{H}^T\right)^{-1}(\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{h})\\
RSS_h - RSS &= (\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{h})^T\left(\mathbf{H}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^-\mathbf{H}^T\right)^{-1}(\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{h})
\end{aligned}
$$

Přehled

Testovací statistika apriorního a posteriorního testu

$$t = \frac{1}{\sigma_0^2}(RSS_h - RSS) \sim \chi_p^2 \qquad t_k = \chi_p^2(1-\alpha)$$

$$f = \frac{1}{p\hat{\sigma}_0^2}(RSS_h - RSS) \sim F_{p,m-n} \qquad f_k = F_{p,m-n}(1-\alpha)$$

χ_p^2 je χ^2 rozdělení s p stupni volnosti

$F_{p,m-n}$ je Fisherovo-Snedecorovo rozdělení s p a $(m-n)$ stupni volnosti

Přehled

Aposteriorní jednotková směrodatná odchylka

Společné vyrovnání bez podmínek

$\hat{\sigma}_0^2$ odděleného vyrovnání dvou nezávislých etap

$$\hat{\sigma}_0^{2(i)} = \frac{RSS_i}{n_i'}, \qquad n_i' = m_i - n_i,\ i = 1, 2 \qquad (m - n) = n_1' + n_2'$$

$\hat{\sigma}_0^2$ společného vyrovnání dvou nezávislých etap

- stejný počet nadbytečných pozorování $n_1' = n_2'$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_0^{2(1)} + \hat{\sigma}_0^{2(2)}),$$

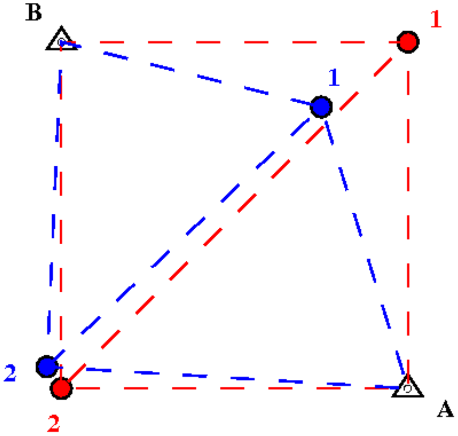
- různý počet nadbytečných pozorování $n_1' \neq n_2'$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{n_1'\hat{\sigma}_0^{2(1)} + n_2'\hat{\sigma}_0^{2(2)}}{n_1' + n_2'},$$

Přehled

Příklad

Společné vyrovnání bez podmínek



$$RSS_h - RSS =$$

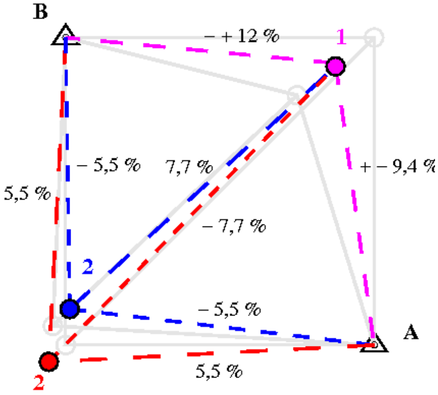
$$= \left(\Delta\hat{\mathbf{x}}_i^{(1,2)}\right)^T \left(\Delta\mathbf{Q}_{\hat{x}_i\hat{x}_i}^{(1,2)}\right)^{-1} \left(\Delta\hat{\mathbf{x}}_i^{(1,2)}\right)$$

$$\Delta\hat{\mathbf{x}}_i^{(1,2)} = \begin{pmatrix} \hat{x}_i^{(1)} - \hat{x}_i^{(2)} \\ \hat{y}_i^{(1)} - \hat{y}_i^{(2)} \end{pmatrix}$$

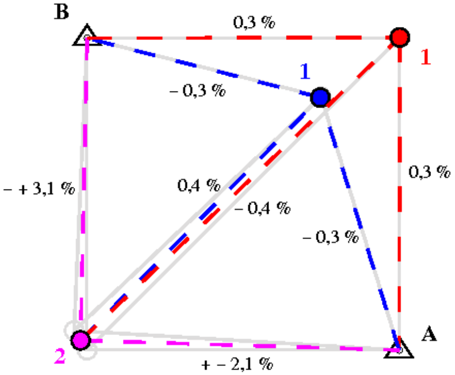
$$\Delta\mathbf{Q}_{\hat{x}_i\hat{x}_i}^{(1,2)} = \mathbf{Q}_{\hat{x}_i\hat{x}_i}^{(1)} + \mathbf{Q}_{\hat{x}_i\hat{x}_i}^{(2)}$$

Příklad

Testování bodu číslo 1 a 2



$$RSS_h - RSS = 6.71$$



$$RSS_h - RSS = 0.27$$