Berechnung von Gleichstrommotoren

March 4, 2023

1 Berechnung von Gleichstrommotoren

1.1 Physikalische Größen

Größe	Einheit	Symbol	Kommentar
Spannung	V	U	Spannung am Motor
Nennspannung	V	U_{N}	Spannung, bei der alle Motorkennwerte ermittelt werden
Gegeninduzierte Spannung	V	U_{ind}	Spannung, die durch die Bewegung der Leiterschleifen im Magnetfeld induziert wird
Strom	A	I	Betriebsstrom
Leerlaufstrom	A	I_0	Strom ohne Last
Haltestrom (stall current)	A	I_{H}	Strom im Blockadefall
Drehmomentkonstante	Nm/A	k_{M}	Linearitätskonstante, Verhältnis aus Drehmoment und Motorstrom
EMK-Konstante (Motorkonstante)	V / min $^{-1}$	k_{E}	Linearitätskonstante, Verhältnis aus gegeninduzierter Spannung und Drehzahl, auch Generatorkonstante genannt
Drehzahlkonstante	min $^{-1}$ / V	k_{n}	Kehrwert von k_{E}
Drehfrequenz	Hz	f	
Drehzahl	min $^{-1}$	n	
Leerlaufdrehzahl	min $^{-1}$	n_0	
Winkelgeschwindigkeit	$\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$	ω	
Ohmscher Widerstand	Ω	R	***Terminal Resistance***
Drehmoment	Nm	M	

Größe	Einheit	Symbol	Kommentar
Haltemoment	Nm	M_H	Drehmoment bei Blockfahrt (im Blockadefall)
Reibmoment	Nm	M_R	Moment, das durch die Lager und Kommutierung entsteht
Drehmoment bei max. Wirkungsgrad	Nm	M_meff	
Leistung	W	P	
Leistung bei höchstem Wirkungsgrad	W	P_max	
Wirkungsgrad	-	η	Wirkungsgrad ist immer <1
max. Wirkungsgrad	-	η_max	

1.2 Berechnung von Motorkennlinien

Für die Berechnung der Kennlinien werden folgende Eingangsgrößen benötigt:

- die Nennspannung U_N
- der Motorwiderstand R
- der Leerlaufstrom I_0
- die Drehmomentkonstante k_M

1.2.1 Drehmomentbereich zwischen Reibmoment und Haltemoment

Mit diesen Größen lassen sich zunächst Reibmoment M_R und Haltemoment M_H berechnen:

$$M_\mathrm{R} = k_\mathrm{M} \cdot I_0$$

$$M_\mathrm{H} = k_M \cdot (I_\mathrm{H} - I_0)$$

mit

$$I_\mathrm{H} = \frac{U_\mathrm{N}}{R}$$

Die Kennlinien werden über dem Drehmoment aufgetragen, das Werte zwischen 0 und M_H annehmen kann.

Je nach Arbeitspunkt des Motors kann es auch sinnvoll sein, das Reibmoment aus den Herstellerangaben bei maximalem Wirkungsgrad zu berechnen:

$$I(\eta_{\max}) = \frac{M(\eta_{\max}) - M_{\mathrm{R}}}{k_{\mathrm{M}}}$$

daraus folgt:

$$M_{\mathrm{R}} = I(\eta_{\max})k_{\mathrm{M}} - M(\eta_{\max})$$

1.2.2 Der Motorstrom in Abhängigkeit des Drehmoments

Mit Hilfe von M_{R} kann der Motorstrom I_{M} in Abhängigkeit vom Drehmoment M berechnet werden:

$$I_{\mathrm{M}}(M) = \frac{M + M_{\mathrm{R}}}{k_{\mathrm{M}}}$$

1.2.3 Der Motorstrom und -spannung in Abhängigkeit der Kreisfrequenz

Der im Motor fließende Strom wird bestimmt durch die Motorspannung U_{N} reduziert um die Drehzahlabhängige gegeninduzierte Spannung:

$$I_{\mathrm{M}} = \frac{U_{\mathrm{N}} - U_{\mathrm{ind}}}{R} = \frac{U_{\mathrm{N}} - k_{\mathrm{M}}\omega}{R}$$

Dies lässt sich umstellen zu dem mehr gebräulichen Zusammenhang:

$$U_{\mathrm{N}} = R \cdot I_{\mathrm{M}} + k_{\mathrm{M}} \cdot \omega$$

1.2.4 Die Drehzahl in Abhängigkeit des Motorstroms

Die Winkelgeschwindigkeit bzw. Keisfrequenz ω ist mit der Drehzahl n über den Zusammenhang

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{60\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}}} n = \frac{\pi}{30} \frac{\mathrm{min}}{\mathrm{s}} \cdot n$$

verknüpft. Damit ergibt sich für die Motordrehzahl

$$n = \frac{U_{\mathrm{N}} - R \cdot I_{\mathrm{M}}}{k_{\mathrm{M}}} \cdot \frac{30}{\pi} \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}}$$

1.2.5 Leistungen und Wirkungsgrad in Abhängigkeit der Drehzahl

Die elektrische Leistung ist

$$P_{\mathrm{el}} = U_{\mathrm{N}} \cdot I_{\mathrm{M}}$$

Die mechanische Leistung für Drehbewegungen ist gegeben durch

$$P_{\text{mech}} = M \cdot \omega = M \cdot \frac{\pi}{30} \frac{\text{min}}{\text{s}} \cdot n$$

Die Wirkungsgrad η ist das Verhältnis aus mechanischer Leistung zu eingetragener elektrischer Leistung

$$\eta = \frac{P_{\text{mech}}}{P_{\text{el}}}$$

Dabei gilt stets $\eta < 1$. Die Verlustleitung $P_{\text{V}} = P_{\text{el}} - P_{\text{mech}} = (1 - \eta) \cdot P_{\text{el}}$ wird in durch den elektrischen Widerstand und Reibung als Wärme abgegeben und führt mit der Zeit zur Erwärmung des Motors.

1.2.6 Berechnung des Drehmoments bei maximalem Wirkungsgrades

Bestimmung von η_{max} Zur Bestimmung des maximalen Wirkungsgrades wird η zunächst als Funktion von M berechnet. Hierzu werden P_{mech} und P_{el} als Funktion des Drehmoments ausgedrückt

$$P_{\text{mech}}(M) = M \cdot \omega(M) = M \cdot \frac{U_{\text{N}} - R \cdot I_{\text{M}}(M)}{k_{\text{M}}}$$

mit $I_{\text{M}}(M) = \frac{M+M_{\text{R}}}{k_{\text{M}}}$ erhält man durch ausmultiplizieren

$$P_{\text{mech}}(M) = -\frac{R}{k_{\text{M}}^2} M^2 + M \left(-\frac{R}{k_{\text{M}}^2} M_{\text{R}} + \frac{U_{\text{N}}}{k_{\text{M}}} \right)$$

Mit der Substitution $a = -\frac{R}{k_{\text{M}}^2}$ und $b = \frac{U_{\text{N}}}{k_{\text{M}}}$ erhält man vereinfacht

$$P_{\text{mech}}(M) = aM^2 + M(aM_{\text{R}} + b)$$

Für die elektrische Leistung als Funktion von M ergibt sich

$$P_{\text{el}}(M) = U_{\text{N}} \cdot I_{\text{M}}(M) = \frac{U_{\text{N}}}{k_{\text{M}}}(M + M_{\text{R}}) = b \cdot (M + M_{\text{R}})$$

Der Wert von $\eta(M)$ wird maximal wenn die Steigung des Verlaufs 0 wird, d.h.

$$\frac{\partial \eta}{\partial M} = 0$$

Diese partielle Ableitung lässt sich einfach über die Quotientenregel darstellen

$$\frac{\partial \eta}{\partial M} = \frac{\frac{\partial P_{\text{mech}}}{\partial M} \cdot P_{\text{el}} - \frac{\partial P_{\text{el}}}{\partial M} \cdot P_{\text{mech}}}{P_{\text{el}}^2}$$

Der Ausdruck wird 0 wenn der Zähler 0 wird, d.h wenn

$$\frac{\partial P_{\mathrm{mech}}}{\partial M} \cdot P_{\mathrm{el}} = \frac{\partial P_{\mathrm{el}}}{\partial M} \cdot P_{\mathrm{mech}}$$

Die einzelnen Ableitungen sind von einfacher Gestalt

$$\frac{\partial P_{\mathrm{mech}}}{\partial M} = 2aM + aM_{\mathrm{R}} + b$$

und

$$\frac{\partial P_{\mathrm{el}}}{\partial M} = b$$

Durch Einsetzen und Ausmultiplizieren erhält man am Ende eine quadratische Gleichung

$$M^2 + 2MM_{\mathrm{R}} + M_{\mathrm{R}}^2 + \frac{b}{a}M_{\mathrm{R}} = 0$$

$$M^2 + 2MM_{\mathrm{R}} + M_{\mathrm{R}}^2 - (M_{\mathrm{H}} - M_{\mathrm{R}}) \cdot M_{\mathrm{R}} = 0$$

$$M^2 + MM_{\mathrm{R}} - M_{\mathrm{H}}M_{\mathrm{R}} + 2M_{\mathrm{R}}^2 = 0$$

Diese lässt sich einfach mit der p-q-Formel lösen (die negative Lösung wird als unphysikalisch verworfen):

$$M_{\mathrm{meff}} = -M_{\mathrm{R}} + \sqrt{\underbrace{\frac{U_{\mathrm{N}}}{R}k_{\mathrm{M}}}_{=(M_{\mathrm{H}}+M_{\mathrm{R}})} M_{\mathrm{R}}}$$

Das heißt

$$M_{\mathrm{meff}} = \sqrt{M_{\mathrm{H}}M_{\mathrm{R}} + M_{\mathrm{R}}^2} - M_{\mathrm{R}}$$

An dieser Stelle wird häufig der Abzug von M_{R} vernachlässigt, weil der Term klein gegenüber der Wurzel ist.

Bei vollständiger Rechnung ergibt sich schließlich durch Einsetzen und Umformen

$$\eta_{\max} = 1 - 2\frac{\sqrt{M_{\mathrm{H}}M_{\mathrm{R}} + M_{\mathrm{R}}^2}}{M_{\mathrm{H}} + M_{\mathrm{R}}} + \frac{M_{\mathrm{R}}}{M_{\mathrm{H}} + M_{\mathrm{R}}}$$

Vernachlässigt man die Reibmomente in den Nennern und das quadratische Reibmoment unter der Wurzel erhält man:

$$\eta_{\text{max}} \approx 1 - 2\sqrt{\frac{M_\text{R}}{M_\text{H}}} + \frac{M_\text{R}}{M_\text{H}} = \left(1 - \sqrt{\frac{M_\text{R}}{M_\text{H}}}\right)^2$$

Ersetzt man in der exakten Lösung die Momente durch die Ströme über die Beziehungen

$$M_\text{H} = k_\text{M} \cdot (I_\text{H} - I_0)$$

und

$$M_\text{R} = k_\text{M} \cdot I_0$$

heben sich viele Terme auf und man erhält exakt:

$$\eta_{\text{max}} = \left(1 - \sqrt{\frac{I_0}{I_\text{H}}}\right)^2$$

1.3 Berechnung der maximalen Leistung

Die maximale Leistung ergibt sich, wenn die Steigung von P_mech verschwindet,

$$\frac{\delta P_\text{mech}}{\delta M} = 0$$

Mit den selben Substitutionen wie oben (insbesondere das $-\frac{b}{a} = M_\text{H} + M_\text{R}$) erhält man das Drehmoment bei der maximalen mechanischen Leistung

$$M_\text{Pmax} = \frac{1}{2} M_\text{H}$$

und damit erhält man

$$P_\text{mech,max} = \frac{a}{4} M_\text{H}^2 + \frac{a}{2} M_\text{H} M_\text{R} + \frac{b}{2} M_\text{H}$$

1.4 Formelsammlung

Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{60\frac{\text{s}}{\text{min}}} n = \frac{\pi}{30} \frac{\text{min}}{\text{s}} \cdot n$$

Motorspannung:

$$U = R \cdot I + k_\text{M} \cdot \omega$$

Gegeninduzierte Spannung:

$$U_\text{ind} = n \cdot k_\text{E} = \frac{n}{k_\text{n}} = \frac{\pi}{30} \frac{\text{min}}{\text{s}} \cdot n \cdot k_\text{M} = k_\text{M} \cdot \omega$$

Drehmoment:

$$M = k_{\mathrm{M}} \cdot I_{\mathrm{M}} - M_{\mathrm{R}}$$

elektrische Leistung:

$$P_{\mathrm{el}} = U \cdot I = U \cdot \frac{M + M_{\mathrm{R}}}{k_{\mathrm{M}}}$$

mechanische Leistung:

$$P_{\mathrm{mech}} = M \cdot \omega$$

Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{P_{\mathrm{mech}}}{P_{\mathrm{el}}}$$

Leerlaufdrehzahl:

$$n_0 = k_{\mathrm{E}} \cdot U$$

1.5 Umrechnung von Einheiten

Spannung (Volt):

$$1\mathrm{V} = 1\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A}} = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = 1\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}} = 1\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{As}}$$

Leistung (Watt):

$$1\mathrm{W} = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3} = 1\mathrm{VA} = 1\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}}$$

Kraft (Newton):

$$1\mathrm{N} = 1\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

2 Kinetische Betrachtungen

2.1 Drehmoment

$$M = \theta \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi n \cdot 60\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}} = n \cdot \frac{\pi}{30}\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}}$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \frac{\pi}{30}\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}}\frac{dn}{dt}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{\theta}$$

$$d\omega = \frac{M}{\theta}dt$$

$$\omega = \frac{1}{\theta} \int_{t_a}^{t_e} M(t)dt$$

$$d\alpha = \omega \cdot dt$$

$$\alpha = \int_{t_a}^{t_e} \omega dt$$