

## Appunti di Analisi Matematica 1: Limiti e Derivate

### 1. Definizione di limite

Sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione definita su un insieme  $A$  di numeri reali. Si dice che il limite di  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0$  è  $L$  se e solo se per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che per ogni  $x \in A$  con  $0 < |x - x_0| < \delta$  si ha  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

### 2. Continuità

Una funzione  $f$  è continua in un punto  $x_0$  del suo dominio se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Equivalentemente,  $f$  è continua in  $x_0$  se e solo se per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che per ogni  $x \in A$  con  $|x - x_0| < \delta$  si ha  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ .

### 3. Derivata

La derivata di una funzione  $f$  in un punto  $x_0$  è definita come il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

### 4. Teorema di Lagrange

Se  $f$  è continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $(a, b)$ , allora esiste  $c$  in  $(a, b)$  tale che  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . Questo teorema garantisce l'esistenza di una tangente parallela alla secante che collega i punti  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ .

### 5. Teorema di Rolle

Se  $f$  è continua in  $[a, b]$ , derivabile in  $(a, b)$  e  $f(a) = f(b)$ , allora esiste  $c$  in  $(a, b)$  tale che  $f'(c) = 0$ . Questo teorema garantisce l'esistenza di una tangente orizzontale in un punto dove la funzione ha lo stesso valore agli estremi.

### 6. Formula di Taylor

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$  con resto di Peano o di Lagrange.

### 7. Integrali indefiniti

Una primitiva di  $f$  è una funzione  $F$  tale che  $F' = f$ . L'integrale indefinito di  $f$  è l'insieme di tutte le primitive di  $f$ , differenti tra loro per una costante additiva.

### 8. Integrali definiti

L'integrale definito di  $f$  su  $[a, b]$  è il limite delle somme di Riemann. Il teorema fondamentale del calcolo collega l'integrale definito alla derivata: se  $F$  è una primitiva di  $f$  su  $[a, b]$ , allora  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .