

Algebra - zadania uzupełniające

Adam Bohonos *

12 września 2024

Spis treści

1	Liczby zespolone	1
1.1	Równanie liniowe	1
1.2	Równanie ze sprzężeniem	2
1.3	Obszar na płaszczyźnie zespolonej	9
1.4	Równanie kwadratowe	19
1.5	Pierwiastek zespolony	20
2	Macierze	24
2.1	Wyznacznik z parametrem	24
2.2	Macierz odwrotna z parametrem	27
2.3	Równanie macierzowe	34
2.4	Rząd macierzy	37
2.5	Wartości własne i wektory własne	39
2.6	Diagonalizacja macierzy	47
3	Układy równań	56
3.1	Układy Cramera	56
3.2	Metoda Gaussa	64
4	Geometria analityczna	67
4.1	Kąty w trójkącie	67
4.2	Pole trójkąta i wysokości	73
4.3	Równanie prostej	74
4.4	Równanie płaszczyzny	76
4.5	Punkt symetryczny względem płaszczyzny	78
4.6	Punkt symetryczny względem prostej	80
4.7	Odległość prostych skośnych	82

*[GitHub](#)

1 Liczby zespolone

1.1 Równanie liniowe

Zadanie 1.1.1

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$-6 + 4i + (7 + 6i)z = (7 + 5i)z$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.2

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$-4 - 3i + (7 - 6i)z = (5 - 5i)z$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.3

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$(2 + 4i)z = 2 + 6i + (2 + 5i)z$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.4

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$5 - 5i + (7 - 3i)z = (6 - 5i)z$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.5

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$(2 + 8i)z = 8 - 6i + (4 + 9i)z$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.6

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$(2 + 4i)z = -2 + 5i + (2 + 3i)z$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.7

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$8 - 6i + (6 + 2i)z = (7 + 3i)z$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.8

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$3 + 8i + (8 - 2i)z = (8 - i)z$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.9

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$(3 + 9i)z = -6 - 4i + (3 + 7i)z$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.10

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$(5 - 5i)z = -6 + 9i + (5 - 2i)z$$

Rozwiązanie:

1.2 Równanie ze sprzężeniem**Zadanie 1.2.1**

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(2 - 2i) + (-1 - 2i)\bar{z} - 5 + 5i = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.2

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(-3 + 3i) + (-4 - 2i)\bar{z} + 5 + i = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.3

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(6 + 6i) + (7 + 5i)\bar{z} + 4 + 4i = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.4

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(-4 + 4i) + (-4 + 2i)\bar{z} + 2 + 6i = 0$$

Rozwiązanie:**Zadanie 1.2.5**

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(-3 + 4i) + (5 - 2i)\bar{z} + 4 + 6i = 0$$

Rozwiązanie:**Zadanie 1.2.6**

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(5 + 2i) + (1 - 4i)\bar{z} - 6 + 6i = 0$$

Rozwiązanie:**Zadanie 1.2.7**

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(4 + i) + (-5 + 6i)\bar{z} + 6 + 2i = 0$$

Rozwiązanie:**Zadanie 1.2.8**

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(1 + 3i) + (2 - 3i)\bar{z} + 6 - 3i = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.9

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(-2 - 4i) + (2 - 5i)\bar{z} + 6 + 6i = 0$$

Rozwiązanie:**Zadanie 1.2.10**

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(-2 + 6i) + (-4 + 5i)\bar{z} - 1 + 3i = 0$$

Rozwiązanie:**Zadanie 1.2.11**

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(-4 + 3i) + (-5 - 3i)\bar{z} + 5 + 4i = 0$$

Rozwiązanie:**Zadanie 1.2.12**

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(-2 - 6i) + (-1 + 6i)\bar{z} - 6 - i = 0$$

Rozwiązanie:**Zadanie 1.2.13**

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(1 + 5i) + (2 - 3i)\bar{z} + 4 + 7i = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.14

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(-1 + 3i) + (7 - 6i)\bar{z} + 6 - 3i = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.15

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(1 + 6i) + (4 + 6i)\bar{z} - 5 - 4i = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.16

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(-6 + 3i) + (4 + 6i)\bar{z} - 1 + i = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.17

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(1 - i) + (-3 + i)\bar{z} - 4 + 4i = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.18

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(-6 - i) + (-1 + 7i)\bar{z} - 3 - 3i = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.19

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(1 - 3i) + (-4 + 3i)\bar{z} + 3 + 5i = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.20

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z(4 - i) + (-3 + 3i)\bar{z} - 1 - i = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.21

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z^2 + 2\bar{z} + 6 = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.22

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z^2 - 2\bar{z} + 3 = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.23

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z^2 - 6\bar{z} + 7 = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.24

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z^2 + \bar{z} - 6 = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.25

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z^2 + \bar{z} - 6 = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.26

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z^2 - 6\bar{z} - 2 = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.27

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z^2 - 2\bar{z} + 7 = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.28

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z^2 + 2\bar{z} - 1 = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.29

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z^2 - \bar{z} - 6 = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.30

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z^2 + \bar{z} - 4 = 0$$

Rozwiązanie:

1.3 Obszar na płaszczyźnie zespolonej

Zadanie 1.3.1

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunek

$$|z + 3 + i| = 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.2

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunek

$$|z - 1 - 2i| = \sqrt{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.3

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunek

$$|z + 2 + 2i| = 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.4

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunek

$$|z + 3 + 3i| = \frac{3}{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.5

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunek

$$|z - 3 - 2i| = \sqrt{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.6

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunek

$$|z - 2 - 2i| < \frac{1}{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.7

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunek

$$|z + 1 - i| \geq \sqrt{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.8

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunek

$$|z - 2 + 2i| > 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.9

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunek

$$|z + 2 - 3i| \geq \frac{5}{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.10

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunek

$$|z + 1 - 2i| \leq \frac{1}{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.11

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunek

$$2 < |z - 1 - 3i| < 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.12

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunek

$$\sqrt{2} \leq |z + 2 + 3i| \leq 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.13

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunek

$$1 \leq |z + 3 + i| \leq \frac{3}{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.14

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunek

$$\frac{3}{2} < |z + 2 - 3i| < 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.15

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunek

$$1 < |z + 3 - 2i| \leq \frac{3}{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.16

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunki

$$\frac{5}{2} \leq |z| < 4 \quad \text{oraz} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.17

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunki

$$3 \leq |z| \leq 5 \quad \text{oraz} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) < \frac{3\pi}{4}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.18

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunki

$$\frac{3}{2} \leq |z| \leq \frac{5}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{\pi}{3} < \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.19

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunki

$$1 < |z| < \frac{5}{2} \quad \text{oraz} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) < \frac{\pi}{4}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.20

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunki

$$2 \leq |z| < 3 \quad \text{oraz} \quad -\frac{\pi}{6} \leq \arg(z) < \frac{\pi}{3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.21

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunki

$$|z + 2 + 2i| \geq \frac{3}{2} \quad \text{oraz} \quad |z + 1 + i| > 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.22

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunki

$$|z + 1 - 3i| \geq 3 \quad \text{oraz} \quad |z + 2 - 2i| \geq 1$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.23

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunki

$$|z - 2 + i| > \frac{3}{2} \quad \text{oraz} \quad |z - 1 - 3i| \leq \frac{5}{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.24

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunki

$$|z - 3 - 2i| \leq 2 \quad \text{oraz} \quad |z - 1 - 2i| > 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.25

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunki

$$|z + 1 + i| \geq 3 \quad \text{oraz} \quad |z + 2 + 3i| \geq 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.26

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunki

$$|z + 1 - i| \geq \frac{3}{2} \quad \text{oraz} \quad |z - 1 - i| < \frac{5}{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.27

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunki

$$|z + 3 - i| \geq 1 \quad \text{oraz} \quad |z + 1 + i| \leq \frac{5}{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.28

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunki

$$|z + 3 - i| < 2 \quad \text{oraz} \quad |z + 3 - 2i| \geq 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.29

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunki

$$|z - 3 + 3i| \leq \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad |z - 1 - 2i| \leq \frac{5}{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.3.30

Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej obszar spełniający warunki

$$|z - 1 - 3i| > \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad |z - 3 - 2i| > \frac{5}{2}$$

Rozwiązanie:

1.4 Równanie kwadratowe

Zadanie 1.4.1

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(1 - i)z^2 + (11 - 5i)z + (24 - 2i) = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.4.2

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(1 - 2i)z^2 + (1 + 13i)z + (-12 - 16i) = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.4.3

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(1 - i)z^2 + (-5 - 13i)z + (-36 - 2i) = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.4.4

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(1 - 2i)z^2 + (-7 - 11i)z + (-18 + i) = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.4.5

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(1 - 2i)z^2 + (9 - 3i)z + (10 + 5i) = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.4.6

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(1 - i)z^2 + (9 + 3i)z + (4 + 16i) = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.4.7

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(1 - i)z^2 + (-13 - 3i)z + (10 + 28i) = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.4.8

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(1 - i)z^2 + (7 + i)z + (6 + 8i) = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.4.9

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(1 - 2i)z^2 + (-3 - 14i)z + (-18 - 14i) = 0$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.4.10

Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(1 - i)z^2 + (-1 - 13i)z + (-24 - 16i) = 0$$

Rozwiązanie:

1.5 Pierwiastek zespolony

Zadanie 1.5.1

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[4]{(1 + 2\sqrt{5}i) \left(-\frac{16\sqrt{15}}{21} - \frac{8}{21} + i \left(-\frac{8\sqrt{3}}{21} + \frac{16\sqrt{5}}{21} \right) \right)}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.5.2

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{32\sqrt{5}}{3} + \frac{32i}{3} \right) (1 - \sqrt{5}i)}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.5.3

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[4]{(-1 + 2\sqrt{5}i) \left(\frac{4}{21} + \frac{8\sqrt{5}i}{21} \right)}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.5.4

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[4]{\left(-\frac{40}{7} + \frac{8\sqrt{3}i}{7} \right) (2 - \sqrt{3}i)}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.5.5

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[4]{\left(-\frac{8}{3} + \frac{8\sqrt{6}}{3} + i \left(-\frac{8\sqrt{3}}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{3} \right) \right) (1 - \sqrt{2}i)}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.5.6

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[4]{\left(1 + 2\sqrt{2}i\right) \left(-\frac{16\sqrt{6}}{9} - \frac{8}{9} + i \left(-\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{16\sqrt{2}}{9}\right)\right)}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.5.7

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[4]{\left(\frac{8}{7} - \frac{4\sqrt{3}i}{7}\right) (-2 - \sqrt{3}i)}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.5.8

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[4]{(-1 + 2\sqrt{5}i) \left(\frac{8}{21} + \frac{16\sqrt{15}}{21} + i \left(-\frac{8\sqrt{3}}{21} + \frac{16\sqrt{5}}{21}\right)\right)}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.5.9

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[4]{(1 + 2\sqrt{5}i) \left(-\frac{16\sqrt{15}}{21} - \frac{8}{21} + i \left(-\frac{8\sqrt{3}}{21} + \frac{16\sqrt{5}}{21}\right)\right)}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.5.10

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[3]{(1 - \sqrt{2}i) \left(-\frac{9}{64} - \frac{9\sqrt{2}i}{64}\right)}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.5.11

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[3]{\left(\frac{64\sqrt{2}}{3} - \frac{64i}{3}\right) (-1 + \sqrt{2}i)}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.5.12

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[3]{(9\sqrt{2} - 9i)(1 - \sqrt{2}i)}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.5.13

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[4]{(-2 + 2\sqrt{2}i)\left(\frac{4}{3} + \frac{4\sqrt{6}}{3} + i\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)\right)}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.5.14

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[4]{(2 - \sqrt{3}i)\left(-\frac{40}{7} + \frac{8\sqrt{3}i}{7}\right)}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.5.15

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[4]{(-1 + 2\sqrt{5}i)\left(\frac{4}{21} + \frac{8\sqrt{5}i}{21}\right)}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.5.16

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[3]{\left(\frac{64\sqrt{2}}{3} - \frac{64i}{3}\right)(1 - \sqrt{2}i)}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.5.17

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{64\sqrt{2}}{3} + \frac{64i}{3}\right)(-1 + \sqrt{2}i)}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.5.18

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[4]{\left(-1 - 2\sqrt{3}i\right)\left(-\frac{40}{13} - \frac{24\sqrt{3}i}{13}\right)}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.5.19

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[3]{\left(-1 + \sqrt{5}i\right)\left(\frac{32\sqrt{5}}{81} - \frac{32i}{81}\right)}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.5.20

Wyznaczyć wszystkie zadane pierwiastki zespolone i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{32\sqrt{5}}{3} + \frac{32i}{3}\right)(1 - \sqrt{5}i)}$$

Rozwiązanie:

2 Macierze

2.1 Wyznacznik z parametrem

Zadanie 2.1.1

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} x-2 & x+4 \\ x-2 & -4 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.1.2

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x+2 \\ x-3 & x-3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.1.3

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & x+4 \\ x+4 & x-2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.1.4

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & x+3 \\ x-2 & x-2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.1.5

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} x-1 & x+1 \\ x+4 & -4 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.1.6

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2x-1 & x-4 \\ 2 & x-1 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.1.7

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} x+1 & 2 & 1 \\ 2x-2 & 2 & x-2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.1.8

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} 2x+2 & 0 & x-1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & x+1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.1.9

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} x-2 & x-2 & x-2 \\ 3 & x-3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.1.10

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 3 & x+1 & 1 \\ x+4 & 2x+2 & -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.1.11

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -4 & x+1 & 2x-2 \\ x+4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.1.12

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} x & -4 & x-2 \\ 4 & -2 & 3 \\ x-2 & x+3 & -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.1.13

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} x-2 & x-3 & 0 \\ x+1 & 2 & 1 \\ x-2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.1.14

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} x+4 & x+1 & 3 \\ x-1 & -4 & 2 \\ 1 & x+3 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.1.15

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} -4 & x+1 & x+3 \\ -4 & -2 & x+3 \\ -2 & x-1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.1.16

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} -3 & x-3 & -3 & x+3 \\ x+3 & x-1 & -1 & x-1 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.1.17

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} x & 4 & 3 & 2x+4 \\ x+4 & 2 & 3 & x+2 \\ 4 & -2 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.1.18

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & x+2 & 3 & x-2 \\ 3 & x+1 & 1 & 2 \\ -3 & x & x+3 & -4 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.1.19

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} x-2 & -3 & -1 & x+2 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & x-1 & 3 & x+4 \\ 4 & -1 & x+4 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.1.20

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & x+1 & -4 \\ x+1 & -4 & -1 & 4 \\ x+2 & x+1 & -1 & 3 \\ 1 & x+4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

2.2 Macierz odwrotna z parametrem

Zadanie 2.2.1

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2x + 2 \\ x - 1 & x + 1 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = 2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.2.2

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} 2x - 2 & x - 3 \\ x + 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = -2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.2.3

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} x - 1 & -3 \\ x - 1 & 2x + 1 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = 2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.2.4

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} x + 4 & -3 \\ x + 2 & 2x + 1 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = -2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.2.5

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} 2x-2 & x-3 \\ x-1 & -4 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = 2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.2.6

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 & 2x-2 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ x-3 & 4 & 1 & x-2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = -1$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.2.7

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} x-1 & 2x-1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & x+2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = 2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.2.8

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & x-1 & x-1 \\ x-2 & 4 & x-1 & -4 \\ -1 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = -1$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.2.9

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & x-1 & -3 \\ 1 & x-3 & 2 & 1 \\ 1 & x-3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & x-1 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = -1$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.2.10

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} x-2 & 3 & -4 & -1 \\ x & -1 & x-3 & x-2 \\ 2 & 0 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = 2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.2.11

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & x+2 & 3 \\ 0 & -3 & x-3 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & x+3 & x+1 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = -2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.2.12

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & x+2 & -1 \\ -4 & 2 & 2x-4 & x+3 \\ 4 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = 2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.2.13

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} 4 & x & -2 & x+2 \\ -1 & 1 & x-4 & 4 \\ 4 & 2 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & x & 3 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = -1$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.2.14

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} 4 & x+3 & -4 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2x-1 & 2 & x-3 & -4 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = 2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.2.15

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} -3 & x-2 & -2 & 4 \\ 2x-1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ x+1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = 2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.2.16

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} -4 & x & 2x+1 & 4 \\ -1 & -2 & x-1 & -4 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = 3$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.2.17

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} x+1 & 1 & -4 & -3 \\ -3 & -1 & 1 & x-4 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & x-2 & x-1 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = 2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.2.18

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & x-1 & -2 \\ x & x-2 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & x-1 & -3 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = 2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.2.19

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 & 2x+3 \\ -3 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & x+3 & -1 & x+1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = -2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.2.20

Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$A = \begin{bmatrix} 2x+3 & 2 & -4 & -1 \\ x & -2 & x-1 & -1 \\ -3 & -2 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = 3$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie:

2.3 Równanie macierzowe

Zadanie 2.3.1

Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T + 3X = X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.3.2

Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T + 3X = X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.3.3

Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + 4X = X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.3.4

Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T + 4X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot X$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.3.5

Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T + 3X = X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \\ -2 & -2 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.3.6

Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T + 2X = X \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.3.7

Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T + 2X = X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.3.8

Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + 4X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.3.9

Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T + 3X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.3.10

Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T + 2X = X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

2.4 Rząd macierzy

Zadanie 2.4.1

Wyznaczyć rząd macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.4.2

Wyznaczyć rząd macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.4.3

Wyznaczyć rząd macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.4.4

Wyznaczyć rząd macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.4.5

Wyznaczyć rząd macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.4.6

Wyznaczyć rząd macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.4.7

Wyznaczyć rząd macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.4.8

Wyznaczyć rząd macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.4.9

Wyznaczyć rząd macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.4.10

Wyznaczyć rząd macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

2.5 Wartości własne i wektory własne

Zadanie 2.5.1

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.2

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.3

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.4

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.5

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.6

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.7

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.8

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.9

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.10

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.11

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.12

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.13

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.14

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.15

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.16

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.17

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.18

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.19

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.20

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:**Zadanie 2.5.21**

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:**Zadanie 2.5.22**

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.23

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.24

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.25

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.26

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.27

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.28

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.29

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.5.30

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

2.6 Diagonalizacja macierzy

Zadanie 2.6.1

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.6.2

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:**Zadanie 2.6.3**

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:**Zadanie 2.6.4**

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:**Zadanie 2.6.5**

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.6.6

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:**Zadanie 2.6.7**

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:**Zadanie 2.6.8**

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:**Zadanie 2.6.9**

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.6.10

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:**Zadanie 2.6.11**

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:**Zadanie 2.6.12**

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.6.13

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:**Zadanie 2.6.14**

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:**Zadanie 2.6.15**

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.6.16

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.6.17

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.6.18

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.6.19

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.6.20

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.6.21

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.6.22

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.6.23

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.6.24

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.6.25

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.6.26

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.6.27

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.6.28

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.6.29

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.6.30

Przeprowadzić diagonalizację macierzy (jeśli możliwa)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

3 Układy równań

3.1 Układy Cramera

Zadanie 3.1.1

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą x

$$\begin{cases} -x + 3y = -3 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.2

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą y

$$\begin{cases} 3x + 4y = 3 \\ -3x - 3y = -1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.3

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą x

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 4y = -3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.4

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą y

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.5

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą x

$$\begin{cases} -3x + y = 1 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.6

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą x

$$\begin{cases} 4x - 2y + 2z = 2 \\ -x + 2y - 2z = -3 \\ x - z = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.7

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą x

$$\begin{cases} -x - y + z = -2 \\ y + z = -1 \\ x + 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.8

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą x

$$\begin{cases} -3x + y + 4z = 0 \\ 3x - 2y - 2z = -2 \\ 3x - y - 3z = -1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.9

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą z

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 3x - 3y - 2z = 1 \\ 3x - 2y - z = -1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.10

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą x

$$\begin{cases} 4x - 2y + 3z = -2 \\ 3x - 2z = 3 \\ -x + y - 3z = 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.11

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą y

$$\begin{cases} -3x + y - z = 2 \\ 3x - 3y + 2z = -1 \\ -3x + 4y - 3z = -2 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.12

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą z

$$\begin{cases} -2x - 3y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ -y = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.13

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą y

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 4y = -1 \\ x + 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.14

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą y

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ 4x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.15

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą z

$$\begin{cases} -2x - 2y + 4z = -2 \\ -2x - y + 2z = -1 \\ 2x - 2y + z = -3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.16

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą y

$$\begin{cases} -3t - 2x + 3y = 0 \\ 2x - 3y = -2 \\ -x + 2y - 2z = -2 \\ -t + 2z = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.17

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą y

$$\begin{cases} -2t + y + 2z = -1 \\ -2t - x + z = 1 \\ t + 4x + z = -2 \\ 4t + 3x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.18

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą z

$$\begin{cases} -t - 3x + y - 2z = -1 \\ -2x - y - 2z = -1 \\ -2x + 3y - 3z = -3 \\ -t - x + y = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.19

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą x

$$\begin{cases} 2x - y - z = -1 \\ -2y = -1 \\ 4t + x - 3y = 0 \\ 2t + 3y = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.20

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą z

$$\begin{cases} -2t - x - z = -1 \\ 3t + 2x + 2z = 3 \\ 4t - 2x - 3y - 2z = 4 \\ 2t - x - 3z = -3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.21

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą t

$$\begin{cases} -t - 2y + 3z = 2 \\ 4t + 3x + y + z = -3 \\ -2t - 2x + 3y - 3z = -2 \\ -2t - x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.22

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą x

$$\begin{cases} -2t + 4y + 2z = 0 \\ 2t + 2x - 3y = 1 \\ -3x + 4y - 2z = -2 \\ -t - 3x - 2z = -1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.23

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą x

$$\begin{cases} -2t - 2x - y - 2z = -2 \\ 2t - 3x + 3y + 2z = 2 \\ t - x - 3y = 2 \\ 3t - 3x + 2z = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.24

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą y

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 3t - x + y + z = -3 \\ 3t + y + z = -3 \\ 2t - 2x + 4z = 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.25

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą z

$$\begin{cases} 2t - 2y = -1 \\ -2t - 3x + 4y - z = 2 \\ 3t + 3x + 3y = -2 \\ -2t - 3x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.26

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą u

$$\begin{cases} -2t - 2u + 3x - 2y + 3z = 2 \\ -2u - 3x + 4y - 2z = 0 \\ t + 3u + x + y + 4z = 4 \\ -2t - u + 3x + 3z = 4 \\ 2t - x - 3y + 4z = -2 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.27

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą z

$$\begin{cases} -3t - x + z = -3 \\ -3t + 3x + 3y + z = -2 \\ 4t + 4u + 3x + y = -3 \\ 2t - 2u + 2x - 3y + 4z = -1 \\ t - u + 2x + z = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.28

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą u

$$\begin{cases} -3t - 3x - 2y - z = -2 \\ 4t + u + x + 3y + z = -1 \\ 3u + 3x + z = 1 \\ 4t - u + x - 2y - z = 3 \\ 2t - 3u + 3x + 3y + z = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.29

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą u

$$\begin{cases} -t + 4u + 3x + 4y + 3z = -3 \\ 4t - 3u + 4y + z = 2 \\ t + 3u + 3x + 4y + 3z = -3 \\ -t + u - x - 3y = -3 \\ 2t - 2u + x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.30

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą y

$$\begin{cases} 2t + u + x + y + z = -3 \\ -3t + 3u + 2x - z = -3 \\ -3u + 4x - y + 2z = -3 \\ 4t - 3u - 2x = 2 \\ -2t - 2u - y + z = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.31

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą z

$$\begin{cases} -t + x - 3y + 3z = 0 \\ -2t - 2u + 2x + 2y - z = 4 \\ 3t + 4u - v + x - y - 2z = 4 \\ -2t - 2u + 4v - x + 4y + 3z = -3 \\ 3t + 4u + v - x - y + z = -1 \\ -t - u - v + 2x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.32

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą v

$$\begin{cases} 2t - v + 2x + 2y + 3z = -3 \\ 4t + 4u + 4v + 3x + 4y - z = 2 \\ 4t - 2u + 3v - 2x + 3y - z = -2 \\ 4t + 4u + 3v + 3x + 3y - z = -2 \\ 4t + v + x + z = 1 \\ 4t + 3u + 3v + x - y - 3z = -3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.33

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą x

$$\begin{cases} 4u + 2v + 4x - 2y + 4z = -3 \\ -2t - 2v + 4x - 3y = 0 \\ -t + 2u + v + 2x - y + 3z = -1 \\ -t + 3u - v + 2x - y + 2z = 0 \\ 3u - v - 2x + y + z = 2 \\ -2t + 2u - v + x + 3y + 4z = -3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.34

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą y

$$\begin{cases} -t - 2u - 2v + 2y + 2z = -2 \\ -3t - 3u + v + 4x + 4y = 0 \\ u + 3v + 2x - y - z = 2 \\ -3t + 3u - x + y + 2z = -3 \\ -3u + 3v - 2x - 2y + 3z = 1 \\ -3t - u - 3v - x + 4y = -3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.35

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą x

$$\begin{cases} -t - u - v + 3x - y - 3z = 3 \\ 2t - u + 3v + x + y - 3z = 4 \\ 4t + 3u + 3v + 4x + 2y + 2z = -3 \\ 2t + 4u + 4x = 4 \\ -t - 2u + 2v - x - y - 3z = 4 \\ -3u + x + y - z = -3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.36

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą t

$$\begin{cases} -2t + u + 3v + 2w - 3x - 3y + z = -3 \\ -3u + v + 2w + 2x - 3y - 3z = 2 \\ 4t + u + 2v - 2w - 3x - y = 1 \\ t + 2u - 2v + w + 2x + 4y - 3z = -1 \\ 4t + 4u - 2v + w - 3y - z = 3 \\ -t + u - 2v - 3w + 2x + 4y - 2z = 2 \\ 2t - 3u - 2v + w + 3x - 3y = 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.37

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą w

$$\begin{cases} 4t + u + v - w + 3x - 2y + 3z = 2 \\ -3t - u - 3v - w + 3x + 3y + 4z = 2 \\ 2t - u + 2v + w - x + y = 3 \\ 4t + 2u + v + 4w + 4x - 3y + 2z = -1 \\ -2t + 4u + 2v - 2w - y - 3z = 0 \\ -t + 3u - 2v - 2w + 2x - y + z = 2 \\ 2t - u + v + 4w - 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.38

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą t

$$\begin{cases} 4t + u - 3v - 2w - 3x + 4y + 4z = -2 \\ -3t - 2u - 2v + 4w - 2x - 2y + 3z = -2 \\ 4t - 3u - 3v - 2w + 4x + 4y - 2z = 4 \\ -t + 4u - 3v + 3w - 3x + 3y + z = 3 \\ t - 3u - 3v + 2x - 3y = 4 \\ -t + 2u + 4v - 3w + x = -3 \\ -3t + 2u - v + w + 2z = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.39

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą w

$$\begin{cases} -t + u + 4v + 2w + 3x - 3y - 3z = 2 \\ 3t - u + 2v - 2w - 2x - 3y - z = -1 \\ t - 2u - 2v - 2x - 2z = 4 \\ t - 2u - 2v - w + 4x - z = 4 \\ t + u - v - w - 2x + z = -3 \\ -2t + w - x + 3y + 2z = 2 \\ -2t + 2u + 3v + 3w + 3x - 2y - 3z = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.1.40

Z układu równań wyznaczyć niewiadomą v

$$\begin{cases} 4u + 4v + 3w + 2x - 2y - z = -1 \\ 2t - 2u + 3v - 3w + 2x - y + 4z = -2 \\ t - v + x - 2y - 2z = 1 \\ 3t + u + 2w + 2x - y + 3z = 0 \\ -2t + 2u + 2v - w + 3x - 2y + z = -1 \\ -3t - 2u - 3w - 3x - 2y - 3z = 1 \\ -3t + u + v - w + x + 4y = -2 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

3.2 Metoda Gaussa

Zadanie 3.2.1

Rozwiązać układ równań. Jeśli możliwe podać trzy przykładowe rozwiązania. Jedno rozwiązanie sprawdzić.

$$\begin{cases} -t - 2x + y - 4z = 6 \\ t + x + y + 5z = 4 \\ t + y + 2z = 6 \\ -2t - 2x - y - 8z = -4 \\ t + y + 2z = 6 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.2.2

Rozwiązać układ równań. Jeśli możliwe podać trzy przykładowe rozwiązania. Jedno rozwiązanie sprawdzić.

$$\begin{cases} 6t + 3x - 3y + 3z = 9 \\ 4t + 2x - 2y + 2z = 6 \\ -4t + y - z = -1 \\ 2t + x + z = 5 \\ 2t + x - y + z = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.2.3

Rozwiązać układ równań. Jeśli możliwe podać trzy przykładowe rozwiązania. Jedno rozwiązanie sprawdzić.

$$\begin{cases} 6t + x - 2y + z = -2 \\ -2t - x + y = 1 \\ -8t + 2x + 3y - 3z = -3 \\ -2t + x + y - z = -2 \\ 4t - y + z = -1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.2.4

Rozwiązać układ równań. Jeśli możliwe podać trzy przykładowe rozwiązania. Jedno rozwiązanie sprawdzić.

$$\begin{cases} -8t - 2y + 4z = 8 \\ -5t - x + y + z = 6 \\ 3t + x - z = -4 \\ -5t - x - 2y + 3z = 6 \\ -4t - x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.2.5

Rozwiązać układ równań. Jeśli możliwe podać trzy przykładowe rozwiązania. Jedno rozwiązanie sprawdzić.

$$\begin{cases} -4t - 5x + 3y + 4z = -8 \\ 4t + 3x - 2y - 2z = 4 \\ x - z = 3 \\ 4t + 2x - y - z = 3 \\ -4t - 4x + 2y + 3z = -7 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.2.6

Rozwiązać układ równań. Jeśli możliwe podać trzy przykładowe rozwiązania. Jedno rozwiązanie sprawdzić.

$$\begin{cases} -t - y + z = -2 \\ -3t - 5x - 4y - 6z = 5 \\ -x - y - z = -1 \\ -3t - 5x - 5y - 5z = 1 \\ 2t + 3x + 3y + 3z = -1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.2.7

Rozwiązać układ równań. Jeśli możliwe podać trzy przykładowe rozwiązania. Jedno rozwiązanie sprawdzić.

$$\begin{cases} 2t - 2x + 2z = 6 \\ 3t + x + 2y = 3 \\ 6t + 6x + 2y - 3z = -8 \\ 4t + 4x + y - 2z = -6 \\ -2t - 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.2.8

Rozwiązać układ równań. Jeśli możliwe podać trzy przykładowe rozwiązania. Jedno rozwiązanie sprawdzić.

$$\begin{cases} 3t - x + 3y - 3z = -2 \\ 4t + y - 2z = -5 \\ t + x - 2y + z = -3 \\ t - x + y - z = 0 \\ -2t + x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.2.9

Rozwiązać układ równań. Jeśli możliwe podać trzy przykładowe rozwiązania. Jedno rozwiązanie sprawdzić.

$$\begin{cases} -t + 2x - 4z = -6 \\ -t + 2x + 2y + 4z = -2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ t - x - y - 2z = 2 \\ -t + 3x + 2y + 2z = -4 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.2.10

Rozwiązać układ równań. Jeśli możliwe podać trzy przykładowe rozwiązania. Jedno rozwiązanie sprawdzić.

$$\begin{cases} -t - 2x + y - z = -9 \\ 2t - 3x - z = -9 \\ -t + x + y - z = -3 \\ 3t - 3x - y = -4 \\ -t + 2x + y - z = -1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

4 Geometria analityczna

4.1 Kąty w trójkącie

Zadanie 4.1.1

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (3, 3, -1), B = (-1, 5, 4), C = (0, -3, -1)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.2

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (3, 3, 5), B = (-3, 3, -3), C = (4, 3, -2)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.3

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (5, 5, 4), B = (-2, -2, 4), C = (-2, 5, -3)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.4

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (4, 3, -2), B = (4, 0, 1), C = (2, 4, -1)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.5

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (4, 1, 2), B = (4, -2, -1), C = (2, 2, 1)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.6

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (-1, -2, -1), B = (1, -1, -3), C = (0, 0, 1)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.7

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (2, 1, -3), B = (5, 0, -3), C = (3, 4, -3)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.8

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (1, 1, 3), B = (3, 3, 3), C = (1, 3, 5)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.9

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (5, -1, -1), B = (3, -2, 1), C = (1, 0, 0)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.10

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (0, -1, 1), B = (4, 3, 1), C = (0, 3, -3)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.11

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (0, 0, 5), B = (3, 2, 5), C = (3, 2, -2)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.12

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (-3, -2, 0), \quad B = (5, -3, 5), \quad C = (-1, 0, -1)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.13

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (1, 1, 5), \quad B = (5, -1, -1), \quad C = (5, 2, -2)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.14

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (3, 2, 0), \quad B = (5, 3, 0), \quad C = (4, 5, -3)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.15

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (4, 4, 1), \quad B = (3, 1, 0), \quad C = (-1, 1, 4)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.16

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (-2, 1, -1), \quad B = (-3, 4, 4), \quad C = (3, 1, 0)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.17

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (2, -3, 3), B = (-1, 0, -1), C = (3, -2, 3)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.18

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (0, -2, 3), B = (4, 1, 0), C = (0, -3, 2)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.19

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (-2, 4, -3), B = (5, 4, -3), C = (-2, 5, -2)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.20

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (-2, 4, -2), B = (1, -2, 4), C = (-1, -1, 5)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.21

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (2, 5, -2), B = (1, 0, 0), C = (0, 0, 0)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.22

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (3, 2, 0), B = (2, 2, -1), C = (5, 2, 1)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.23

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (-1, 1, 5), B = (-3, 5, 4), C = (5, 2, 1)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.24

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (-3, -3, 3), B = (2, -3, 5), C = (1, -3, -2)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.25

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (3, 4, 4), B = (4, 0, -2), C = (3, 3, -1)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.26

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (1, -1, -1), B = (0, 1, 2), C = (-3, 5, 2)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.27

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (1, 0, -3), B = (-3, 3, 4), C = (0, 0, -2)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.28

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (4, 3, 3), B = (-1, 2, -2), C = (4, 1, 3)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.29

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (-2, -1, 1), B = (-2, 1, 4), C = (5, 3, 3)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.30

Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , gdzie

$$A = (2, -2, 0), B = (0, 3, -3), C = (2, 0, 5)$$

Sprawdzić, czy sumują się do 180° .

Rozwiązanie:

4.2 Pole trójkąta i wysokości

Zadanie 4.2.1

Wyznaczyć pole trójkąta ABC oraz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka B dla

$$A = (5, -1, 4), B = (3, 1, 3), C = (3, 5, 4)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.2

Wyznaczyć pole trójkąta ABC oraz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka C dla

$$A = (5, 2, -3), B = (3, -2, 1), C = (5, -2, -1)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.3

Wyznaczyć pole trójkąta ABC oraz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka A dla

$$A = (5, 1, 3), B = (-1, -1, 4), C = (1, 1, 5)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.4

Wyznaczyć pole trójkąta ABC oraz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka B dla

$$A = (4, -2, -3), B = (5, -1, -3), C = (2, -3, 2)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.5

Wyznaczyć pole trójkąta ABC oraz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka A dla

$$A = (1, -3, 4), B = (-1, 3, 4), C = (1, -3, 3)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.6

Wyznaczyć pole trójkąta ABC oraz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka A dla

$$A = (-3, 4, -2), B = (-2, -3, -3), C = (-1, 5, -3)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.7

Wyznaczyć pole trójkąta ABC oraz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka C dla

$$A = (-1, 2, 5), B = (-1, 1, 5), C = (4, 5, -3)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.8

Wyznaczyć pole trójkąta ABC oraz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka A dla

$$A = (2, 3, 1), B = (2, 4, 2), C = (4, 2, 1)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.9

Wyznaczyć pole trójkąta ABC oraz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka B dla

$$A = (-3, 3, 3), B = (3, -1, 2), C = (5, -1, 4)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.10

Wyznaczyć pole trójkąta ABC oraz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka A dla

$$A = (1, 4, -3), B = (-3, -3, 5), C = (1, 2, -1)$$

Rozwiązanie:

4.3 Równanie prostej

Zadanie 4.3.1

Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (5, 5, 4), \quad P_2 = (5, -1, 1).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej prostej od punktu

$$P_3 = (5, -1, 1).$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.2

Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (2, 3, 4), \quad P_2 = (-2, 5, 4).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej prostej od punktu

$$P_3 = (5, -1, 2).$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.3

Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (4, 2, 1), \quad P_2 = (1, 4, -3).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej prostej od punktu

$$P_3 = (-1, 5, -1).$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.4

Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (-1, 1, 2), \quad P_2 = (5, 4, 2).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej prostej od punktu

$$P_3 = (-1, 1, 4).$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.5

Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (5, -3, 3), \quad P_2 = (3, 5, 1).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej prostej od punktu

$$P_3 = (5, 2, -1).$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.6

Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (1, -3, 4), \quad P_2 = (2, 3, 4).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej prostej od punktu

$$P_3 = (1, -3, 3).$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.7

Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (-2, 3, 1), \quad P_2 = (1, -1, 1).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej prostej od punktu

$$P_3 = (4, -2, 1).$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.8

Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (1, 3, -2), \quad P_2 = (4, -1, -2).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej prostej od punktu

$$P_3 = (4, -1, 5).$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.9

Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (5, 2, 4), \quad P_2 = (3, 2, 2).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej prostej od punktu

$$P_3 = (1, 3, 4).$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.10

Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (-3, -2, -3), \quad P_2 = (-3, 2, 1).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej prostej od punktu

$$P_3 = (-2, -2, 1).$$

Rozwiązanie:

4.4 Równanie płaszczyzny

Zadanie 4.4.1

Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (-1, 1, -2), \quad P_2 = (-1, 2, 0), \quad P_3 = (-3, 2, 4).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej płaszczyzny od punktu

$$P_4 = (1, 3, 4).$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.2

Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (-3, 5, 5), \quad P_2 = (5, -3, -3), \quad P_3 = (5, 4, -3).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej płaszczyzny od punktu

$$P_4 = (-1, 5, 3).$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.3

Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (2, -1, 4), \quad P_2 = (1, -1, 4), \quad P_3 = (-2, -3, -1).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej płaszczyzny od punktu

$$P_4 = (-1, -1, 4).$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.4

Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (3, 5, 3), \quad P_2 = (-1, 2, 0), \quad P_3 = (3, 4, 3).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej płaszczyzny od punktu

$$P_4 = (4, 5, 5).$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.5

Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (-1, 1, 2), \quad P_2 = (-1, 1, -3), \quad P_3 = (1, 4, -3).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej płaszczyzny od punktu

$$P_4 = (-3, -2, 4).$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.6

Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (3, 3, 3), \quad P_2 = (-1, 5, -2), \quad P_3 = (1, -1, 3).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej płaszczyzny od punktu

$$P_4 = (-1, 1, -3).$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.7

Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (4, 5, -3), \quad P_2 = (-2, 4, 3), \quad P_3 = (3, 1, -2).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej płaszczyzny od punktu

$$P_4 = (-2, 5, 3).$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.8

Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (4, 1, 1), \quad P_2 = (3, -2, 5), \quad P_3 = (-1, -2, 5).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej płaszczyzny od punktu

$$P_4 = (1, 5, 4).$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.9

Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (4, 0, 3), \quad P_2 = (-1, 4, -3), \quad P_3 = (-1, -1, -2).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej płaszczyzny od punktu

$$P_4 = (-1, -1, -2).$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.10

Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty

$$P_1 = (1, 1, -1), \quad P_2 = (-2, -3, -2), \quad P_3 = (1, 1, 0).$$

Obliczyć odległość wyznaczonej płaszczyzny od punktu

$$P_4 = (5, -1, -2).$$

Rozwiązanie:

4.5 Punkt symetryczny względem płaszczyzny

Zadanie 4.5.1

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (-2, -1, 4)$$

względem płaszczyzny

$$\pi: -x - 2y + z + 4 = 0.$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.2

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (-2, 5, 2)$$

względem płaszczyzny

$$\pi: -x + 2y - z + 2 = 0.$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.3

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (-1, 5, 2)$$

względem płaszczyzny

$$\pi: -x + y + z + 4 = 0.$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.4

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (5, 3, 4)$$

względem płaszczyzny

$$\pi: x + y + z + 3 = 0.$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.5

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (-3, -2, 3)$$

względem płaszczyzny

$$\pi: x + 2y - z - 2 = 0.$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.6

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (3, 1, 1)$$

względem płaszczyzny

$$\pi: -x - y - z - 1 = 0.$$

Rozwiązanie:**Zadanie 4.5.7**

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (4, 3, 4)$$

względem płaszczyzny

$$\pi: -2x - 2y - 2z - 2 = 0.$$

Rozwiązanie:**Zadanie 4.5.8**

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (5, 5, 3)$$

względem płaszczyzny

$$\pi: 2x + y + 2z - 3 = 0.$$

Rozwiązanie:**Zadanie 4.5.9**

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (2, 2, 3)$$

względem płaszczyzny

$$\pi: x + y + z + 2 = 0.$$

Rozwiązanie:**Zadanie 4.5.10**

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (-2, -1, 4)$$

względem płaszczyzny

$$\pi: -x + y + z + 4 = 0.$$

Rozwiązanie:

4.6 Punkt symetryczny względem prostej

Zadanie 4.6.1

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (3, -3, -1)$$

względem prostej

$$l: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-2}{1}.$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.6.2

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (2, 3, 5)$$

względem prostej

$$l: \frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.6.3

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (1, -2, 4)$$

względem prostej

$$l: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.6.4

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (3, 2, -1)$$

względem prostej

$$l: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-5}{-3}.$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.6.5

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (-2, 5, 1)$$

względem prostej

$$l: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{1}.$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.6.6

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (5, 1, 5)$$

względem prostej

$$l: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-5}{-1}.$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.6.7

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (-3, 2, -2)$$

względem prostej

$$l: \frac{x-5}{-1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-5}{-2}.$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.6.8

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (3, 2, -2)$$

względem prostej

$$l: \frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-5}{2}.$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.6.9

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (2, -3, 4)$$

względem prostej

$$l: \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{-2}.$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.6.10

Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu

$$P = (-3, 2, -1)$$

względem prostej

$$l: \frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Rozwiązanie:

4.7 Odległość prostych skośnych

Zadanie 4.7.1

Obliczyć odległość prostych skośnych

$$l_1: \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-2}, \quad l_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{-1}.$$

Wyznaczyć punkty realizujące minimalną odległość.

Rozwiązanie:

Zadanie 4.7.2

Obliczyć odległość prostych skośnych

$$l_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+1}{2}, \quad l_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{-3}.$$

Wyznaczyć punkty realizujące minimalną odległość.

Rozwiązanie:

Zadanie 4.7.3

Obliczyć odległość prostych skośnych

$$l_1: \frac{x-4}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-5}{-3}, \quad l_2: \frac{x+3}{4} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+2}{2}.$$

Wyznaczyć punkty realizujące minimalną odległość.

Rozwiązanie:

Zadanie 4.7.4

Obliczyć odległość prostych skośnych

$$l_1: \frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}, \quad l_2: \frac{x-3}{-3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}.$$

Wyznaczyć punkty realizujące minimalną odległość.

Rozwiązanie:

Zadanie 4.7.5

Obliczyć odległość prostych skośnych

$$l_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-3}{-3}, \quad l_2: \frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-5}{2}.$$

Wyznaczyć punkty realizujące minimalną odległość.

Rozwiązanie:

Zadanie 4.7.6

Obliczyć odległość prostych skośnych

$$l_1: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-1}{-2}, \quad l_2: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{-3}.$$

Wyznaczyć punkty realizujące minimalną odległość.

Rozwiązanie:

Zadanie 4.7.7

Obliczyć odległość prostych skośnych

$$l_1: \frac{x+3}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+2}{2}, \quad l_2: \frac{x-4}{4} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+3}{5}.$$

Wyznaczyć punkty realizujące minimalną odległość.

Rozwiązanie:

Zadanie 4.7.8

Obliczyć odległość prostych skośnych

$$l_1: \frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{-1}, \quad l_2: \frac{x-1}{4} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-3}{3}.$$

Wyznaczyć punkty realizujące minimalną odległość.

Rozwiązanie:

Zadanie 4.7.9

Obliczyć odległość prostych skośnych

$$l_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-4}{4}, \quad l_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{4}.$$

Wyznaczyć punkty realizujące minimalną odległość.

Rozwiązanie:

Zadanie 4.7.10

Obliczyć odległość prostych skośnych

$$l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-2}, \quad l_2: \frac{x+3}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-5}{4}.$$

Wyznaczyć punkty realizujące minimalną odległość.

Rozwiązanie: