

Analiza - zadania uzupełniające

Adam Bohonos *

12 września 2024

Spis treści

1	Granice	1
1.1	Granice ciągów	1
1.2	Granice funkcji	13
2	Styczna i normalna	16
3	Monotoniczność	22
4	Całka nieoznaczona	36
4.1	Całkowanie przez części	36
4.2	Całkowanie przez podstawianie	38
4.3	Całkowanie ułamków prostych 1-go rodzaju	41
4.4	Całkowanie ułamków prostych 2-go rodzaju	43
4.5	Całkowanie funkcji wymiernych	46
5	Całka oznaczona	52
5.1	Pole obszaru	52
6	Szeregi Fouriera	68
6.1	Szeregi Fouriera	68
7	Funkcje dwóch zmiennych	93
7.1	Płaszczyzna styczna	93
7.2	Całki podwójne po obszarze trójkątnym	96
7.3	Całki podwójne po obszarze ograniczonym wykresami krzywych	116

*GitHub

1 Granice

1.1 Granice ciągów

Zadanie 1.1.1

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 5n^2 + 4}{n^5 - n - 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.2

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^5 + 5n^3 + 5n^2 + 1}{-2n^3 - 2n^2 + 5}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.3

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 2n^3 + 3n^2}{4n^5 - 2n^3 - 2n^2 - n - 3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.4

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 2}{4n^5 - 3n^3 - 3n^2 + 5n + 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.5

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 + 4n}{4n^5 - 2n^3 - 2n^2 - 3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.6

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^5 - 3n^2}{4n^5 + n^3 + n^2 + n + 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.7

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^5 - 2n^3 - 2n^2 + n}{3n^5 - 3n^3 - 3n^2 + 5n - 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.8

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^5 + 2}{-3n^3 - 3n^2 + 5n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.9

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 4n^3 + 3n^2 + 5}{n^5 + 4n^3 + 4n^2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.10

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 3n^3 - 3n + 2}{2n^5 + n^3 + n^2 + 5n - 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.11

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + n^2 + 3n}{-2n^5 - 2n^3 - 2n^2 + 5}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.12

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 2n + 5}{3n^5 + 5n^3 + 5n^2 + 4n + 4}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.13

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^5 + 2n^3 + n^2 + 5n}{-2n^3 - 2n^2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.14

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - n^2}{-3n^5 + 3n^3 + 3n^2 + 3n + 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.15

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^5 + 3n^3 - 3n^2 - 3n - 2}{n^5 - n^3 - n^2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.16

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^5 - 2n^3 - 1}{n^5 + n^3 + n^2 + 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.17

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4}{-2n^5 - 3n^3 - 3n^2 + 3n - 1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.18

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^5 - 2n^3 + 4n^2 + 4n + 4}{5n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.19

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^5 + 3n^2 + 4n}{3n^5 - 3n^3 - 3n^2 + n - 3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.20

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - n^2 + 5n + 1}{4n^5 + 5n^3 + 5n^2 + 4n - 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.21

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 2}{\sqrt{3n^2 + 4n - 2}}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.22

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 5n + 1}}{4n - 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.23

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n^2 + 3n - 3}}{2n - 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.24

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 - 2n - 3}}{4n + 4}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.25

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 1}{\sqrt{n^2 + 3n + 2}}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.26

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 2n}{\sqrt{3n^2 - n - 3}}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.27

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - n}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.28

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 5}{\sqrt{2n^2 + 5n + 4}}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.29

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 3n}{\sqrt{4n^2 + 2n + 1}}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.30

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n + 1}}{2n + 3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.31

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n^2 - 3n - 1}}{4n + 1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.32

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4n - 2}}{n - 3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.33

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{\sqrt{5n^2+2n+3}}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.34

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{\sqrt{2n^2+4n-2}}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.35

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{\sqrt{n^2+5n-2}}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.36

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2}{\sqrt{n^2+n+2}}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.37

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n-3}}{n+1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.38

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n-3}{\sqrt{n^2-3n+5}}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.39

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2-3n+4}}{3n+1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.40

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+n+2}}{3n-1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.41

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^n + 4^n}{3 \cdot 2^n - 3^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.42

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3 \cdot 4^n + 4 \cdot 5^n}{-3 \cdot 3^n + 4 \cdot 5^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.43

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 2^n - 2 \cdot 4^n}{2 \cdot 2^n + 4 \cdot 4^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.44

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2^n + 4^n}{-2 \cdot 2^n + 4 \cdot 5^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.45

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 5^n}{-2^n + 5 \cdot 5^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.46

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n}{-2 \cdot 3^n + 3 \cdot 5^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.47

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \cdot 3^n + 4 \cdot 4^n}{4 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.48

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2^n + 3 \cdot 4^n}{3^n + 2 \cdot 4^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.49

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 4^n - 3 \cdot 5^n}{-2^n + 5 \cdot 5^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.50

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \cdot 2^n + 3^n}{4 \cdot 4^n + 3 \cdot 5^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.51

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \cdot 3^n - 3 \cdot 5^n}{-3 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.52

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n}{4 \cdot 2^n - 3^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.53

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 4^n + 3 \cdot 5^n}{-3 \cdot 4^n + 4 \cdot 5^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.54

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n}{2 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.55

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 4^n}{-2 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.56

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3 \cdot 4^n + 5^n}{-4^n + 4 \cdot 5^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.57

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 3 \cdot 5^n}{4 \cdot 3^n + 3 \cdot 5^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.58

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2^n - 3^n}{2 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.59

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \cdot 3^n + 4 \cdot 4^n}{4 \cdot 3^n + 4 \cdot 4^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.60

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2^n - 3 \cdot 5^n}{2 \cdot 3^n + 2 \cdot 5^n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.61

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - 3n + 1} - \sqrt{n^2 - 2n - 1} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.62

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 + 3n + 1} - \sqrt{4n^2 + 5n - 3} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.63

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{5n^2 - 3n} + \sqrt{5n^2 - 3n + 1} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.64

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{5n^2 - n} + \sqrt{5n^2 + 4n + 3} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.65

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - 3n + 5} - \sqrt{n^2 - n + 2} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.66

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{4n^2 + 2n - 2} + \sqrt{4n^2 + 5n - 1} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.67

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n^2 - n + 5} - \sqrt{2n^2 + 3n + 3} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.68

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{n^2 - 3} + \sqrt{n^2 + n + 3} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.69

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{4n^2 + 4n + 1} + \sqrt{4n^2 + 4n + 4} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.70

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{5n^2 + n - 2} + \sqrt{5n^2 + n + 3} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.71

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 + 5n + 5} - 2\sqrt{n^2} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.72

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{2n^2 + n - 2} + \sqrt{2n^2 + n + 3} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.73

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 - 2n} - \sqrt{4n^2 + 3n - 1} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.74

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{2n^2 + 5n - 3} + \sqrt{2n^2 + 5n + 2} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.75

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{5n^2 + 3n} + \sqrt{5n^2 + 5n + 2} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.76

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{4n^2 + 4n - 2} + \sqrt{4n^2 + 5n - 1} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.77

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{5n^2 - n - 1} + \sqrt{5n^2 - n + 3} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.78

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n^2 + n + 2} - \sqrt{2n^2 + 5n + 5} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.79

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{4n^2 + 5} + \sqrt{4n^2 + 5n + 2} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.80

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{n^2 + n + 5} + \sqrt{n^2 + 3n - 2} \right)$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.81

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+2} \right)^{2-n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.82

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n-2}{5n-3} \right)^{3n+3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.83

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+4}{5n+5} \right)^{3n+4}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.84

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+2}{4n-1} \right)^{4n+1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.85

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+5} \right)^{3n+4}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.86

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n-3} \right)^{4n-3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.87

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+1} \right)^{n-3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.88

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5-3n}{4-3n} \right)^{5-n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.89

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n-2}{-n-1} \right)^{5n-3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.90

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{3n+3} \right)^{2-3n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.91

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-3n-1}{-3n-2} \right)^{4n+2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.92

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-n}{-n-3} \right)^{4n+5}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.93

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n+3} \right)^{-2n-1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.94

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3-3n}{5-3n} \right)^{5n-1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.95

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2-2n}{1-2n} \right)^{2n-3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.96

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+4}{3n-3} \right)^{5n+1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.97

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+4}{5n+3} \right)^{3n+3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.98

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3-2n}{1-2n} \right)^{4-n}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.99

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n-3}{5-n} \right)^{5n-3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.1.100

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+4}{2n+1} \right)^{-2n-1}$$

Rozwiązanie:

1.2 Granice funkcji

Zadanie 1.2.1

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{4 - \sqrt{16 - x}}{x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.2

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - 3x}}{3x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.3

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 2x}}{2x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.4

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x + 1}}{2x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.5

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x}}{3x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.6

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9 - x}}{4x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.7

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.8

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{4 - \sqrt{16 - 2x}}{x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.9

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.10

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1 - \sqrt{2x+1}}{2x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.11

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1}}{4x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.12

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{16-3x}}{4x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.13

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-2x}}{x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.14

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2 - \sqrt{2x+4}}{x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.15

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9-4x}}{4x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.16

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2 - \sqrt{x+4}}{2x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.17

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{16 - 4x}}{2x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.18

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9 - 2x}}{x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.19

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{4x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 1.2.20

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1 - \sqrt{1-x}}{2x}$$

Rozwiązanie:

2 Styczna i normalna

Zadanie 2.0.1

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{x+4}{4x^2-2}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.2

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{3x + 4}$$

w punkcie $x_0 = -2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.3

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x + 3}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.4

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{3x^2 + 3x + 1}{3 - 2x}$$

w punkcie $x_0 = -2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.5

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{2x + 1}{-x^2 + 2x - 1}$$

w punkcie $x_0 = 2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.6

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{3x^2 - x + 3}{-2x - 1}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.7

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{4x + 4}$$

w punkcie $x_0 = -2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.8

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{4x + 2}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.9

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{-2x^2 - x - 2}{2x + 4}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.10

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{3x + 2}{-x^2 + x + 4}$$

w punkcie $x_0 = -2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.11

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{1 - x}$$

w punkcie $x_0 = -2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.12

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{3 - x}{-x^2 - 2x - 1}$$

w punkcie $x_0 = -2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.13

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 2}{2x - 2}$$

w punkcie $x_0 = 2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.14

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.15

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x - 2}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.16

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{3x - 1}{-x^2 - 1}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.17

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$$

w punkcie $x_0 = 2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.18

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{2 - 2x}{2x^2 + 3x + 4}$$

w punkcie $x_0 = -2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.19

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{4x^2 + 2x + 2}{1 - x}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.20

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{3x + 2}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.21

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + 2x + 4}}{4 - 2x}$$

w punkcie $x_0 = 3$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.22

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{e^{x^2+4x+4}}{-2x-2}$$

w punkcie $x_0 = -2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.23

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = e^{2x^2+3x-2}$$

w punkcie $x_0 = -2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.24

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.25

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + 4x - 2}}{2 - x}$$

w punkcie $x_0 = 3$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.26

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 4}$$

w punkcie $x_0 = -2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.27

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 4}$$

w punkcie $x_0 = 2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.28

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{2x - 2}$$

w punkcie $x_0 = 2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.29

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 2}$$

w punkcie $x_0 = 3$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.30

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$

w punkcie $x_0 = 2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.31

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = e^{-x^2+x+2}$$

w punkcie $x_0 = 2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.32

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = e^{-2x^2-2x+4}$$

w punkcie $x_0 = -2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.33

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{e^{-x^2+2x+3}}{4-x}$$

w punkcie $x_0 = 3$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.34

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = e^{-2x^2-2x+4}$$

w punkcie $x_0 = -2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.35

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{e^{2x^2+3x+1}}{4x+2}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.36

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = e^{4-x^2}$$

w punkcie $x_0 = -2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.37

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+4x+1}}{2-x}$$

w punkcie $x_0 = 3$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.38

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{e^{-2x^2+3x+2}}{2x-2}$$

w punkcie $x_0 = 2$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.39

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{e^{-x^2+2x+3}}{4-2x}$$

w punkcie $x_0 = 3$.

Rozwiązanie:

Zadanie 2.0.40

Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{e^{2x^2-2}}{3x+4}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie:

3 Monotoniczność

Zadanie 3.0.1

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{2x - 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.2

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 2}{4x - 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.3

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{4x^2 + x + 4}{1 - x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.4

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.5

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x - 1}{2x + 4}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.6

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 2}{2x + 1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.7

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 2}{2x - 1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.8

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{4x^2 + 4x + 4}{-2x - 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.9

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 1}{2x + 3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.10

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 4}{4x - 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.11

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{4x^2 + 4x + 1}{2x - 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.12

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 2}{4x + 4}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.13

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3}{2x - 1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.14

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{4x + 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.15

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3}{2x + 1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.16

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{3 - x^2}{4 - 2x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.17

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{2 - x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.18

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{4x^2 + 2x - 1}{4x - 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.19

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{4x^2 - x + 4}{-x - 1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.20

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{-x - 1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.21

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{4x + 3}{3x^2 + 4x + 3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.22

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{4x + 2}{4x^2 + 2x + 1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.23

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{3 - x}{4x^2 + 3x + 4}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.24

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{2x + 2}{3x^2 + 2x + 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.25

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{4 - 2x}{2x^2 + 4x + 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.26

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{2 - 2x}{x^2 + 3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.27

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.28

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{2 - 2x}{x^2 + 4x + 4}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.29

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{3x + 3}{4x^2 + 2x + 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.30

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{2x + 2}{3x^2 + 4x + 4}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.31

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{2x + 1}{-x^2 + 2x - 1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.32

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{x + 3}{-x^2 + 2x - 1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.33

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{-x - 2}{3x^2 + 2x + 4}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.34

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{1 - x}{2x^2 - x + 1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.35

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{4x + 3}{-2x^2 - 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.36

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{3x + 3}{-x^2 + 2x - 1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.37

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{-2x - 2}{-2x^2 - x - 1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.38

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{4x - 1}{4x^2 + 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.39

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{2x + 3}{-x^2 + 2x + 3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.40

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{2x+1}{-2x^2+x-1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.41

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{3x^3}{-x-1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.42

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{-2x^3 - x - 3}{x+3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.43

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3x + 3}{3x-1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.44

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{-x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{x + 3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.45

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{2x^3 - x + 2}{2 - x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.46

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{-x^3 - 3x^2 - 2}{3x - 1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.47

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{-x^3 + 3x - 3}{2 - 2x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.48

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = -\frac{x^3}{2x-2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.49

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = -\frac{x^3}{3x-1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.50

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{-x^3 - 3x - 3}{3x + 3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.51

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 2}{-x - 1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.52

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{3x^3}{3x+1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.53

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{-x^3 - 3x^2 + 3x + 3}{3x+2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.54

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{-x^3 - 3x^2 - 3x - 1}{x-2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.55

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{-x^3 - 3x - 3}{x+1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.56

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{-x^3 - x - 3}{x + 3}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.57

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + x - 3}{x + 2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.58

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{3x^3 + 2x + 2}{-x - 1}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.59

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{-2x^3 + x - 3}{3 - x}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 3.0.60

Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = -\frac{2x^3}{1-x}$$

Rozwiązanie:

4 Całka nieoznaczona

4.1 Całkowanie przez części

Zadanie 4.1.1

Obliczyć całkę

$$\int (5x - 2) \ln(3x) dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.2

Obliczyć całkę

$$\int (3x^2 + 2x + 3) e^{4x} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.3

Obliczyć całkę

$$\int (2x^2 - x + 2) \sin(2x) dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.4

Obliczyć całkę

$$\int (4x^2 - 3x - 1) e^{4x} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.5

Obliczyć całkę

$$\int (5x^2 - 3x + 2) \sin(4x) dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.6

Obliczyć całkę

$$\int (-2x^2 - 3) \ln(x) dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.7

Obliczyć całkę

$$\int (-3x^2 + 4x + 4) \cos(x) dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.8

Obliczyć całkę

$$\int (3x^2 - 3x + 3) \ln(2x) dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.9

Obliczyć całkę

$$\int (x^2 - 3x - 1) e^x dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.10

Obliczyć całkę

$$\int (3x^2 - 2x - 2) \sin(4x) dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.11

Obliczyć całkę

$$\int (-x^2 - 2x - 1) \cos(2x) dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.12

Obliczyć całkę

$$\int (-2x - 3) \sin(4x) dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.13

Obliczyć całkę

$$\int (3 - x^2) \sin(2x) dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.14

Obliczyć całkę

$$\int (-3x^2 - 2x) \sin(x) dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.15

Obliczyć całkę

$$\int (-3x^2 - x - 1) \cos(3x) dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.16

Obliczyć całkę

$$\int (3x^2 + 3x - 3) \sin(2x) dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.17

Obliczyć całkę

$$\int (3x + 5) e^x dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.18

Obliczyć całkę

$$\int (3x^2 + 2x + 2) \cos(2x) dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.19

Obliczyć całkę

$$\int (2x^2 - 2) \cos(3x) dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.1.20

Obliczyć całkę

$$\int (-3x^2 - 3x - 1) e^x dx$$

Rozwiązanie:

4.2 Całkowanie przez podstawianie

Zadanie 4.2.1

Obliczyć całkę

$$\int (5 - x) \sqrt{4x + 1} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.2

Obliczyć całkę

$$\int \sqrt{2x+4} \cdot (5x+3) dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.3

Obliczyć całkę

$$\int \sqrt{x+5} \cdot (3x-3) dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.4

Obliczyć całkę

$$\int (5-3x) \sqrt{2x+2} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.5

Obliczyć całkę

$$\int (2-x) \sqrt{5x+5} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.6

Obliczyć całkę

$$\int (3-2x) \sqrt{3x-3} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.7

Obliczyć całkę

$$\int (2x-1) \sqrt{5x+4} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.8

Obliczyć całkę

$$\int \sqrt{4x+4} \cdot (5x+3) dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.9

Obliczyć całkę

$$\int (-3x-1) \sqrt{3x+5} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.10

Obliczyć całkę

$$\int (1 - 3x) \sqrt{x + 3} \, dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.11

Obliczyć całkę

$$\int \sqrt{2x + 4} \cdot (3x + 2) \, dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.12

Obliczyć całkę

$$\int (5 - 3x) \sqrt{x + 3} \, dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.13

Obliczyć całkę

$$\int \sqrt{x + 4} \cdot (4x + 2) \, dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.14

Obliczyć całkę

$$\int (3 - 2x) \sqrt{3x - 3} \, dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.15

Obliczyć całkę

$$\int (3 - 3x) \sqrt{5x - 3} \, dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.16

Obliczyć całkę

$$\int (x - 1) \sqrt{3x - 2} \, dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.17

Obliczyć całkę

$$\int (2 - 2x) \sqrt{2x + 1} \, dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.18

Obliczyć całkę

$$\int (2 - 2x) \sqrt{4x - 1} \, dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.19

Obliczyć całkę

$$\int (2x - 3) \sqrt{3x - 1} \, dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.2.20

Obliczyć całkę

$$\int \sqrt{3x + 2} \cdot (5x - 3) \, dx$$

Rozwiązanie:

4.3 Całkowanie ułamków prostych 1-go rodzaju

Zadanie 4.3.1

Obliczyć całkę

$$\int -\frac{3}{(4 - x)^3} \, dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.2

Obliczyć całkę

$$\int \frac{1}{(3x - 3)^7} \, dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.3

Obliczyć całkę

$$\int \frac{1}{5x - 2} \, dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.4

Obliczyć całkę

$$\int -\frac{2}{(2x + 2)^2} \, dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.5

Obliczyć całkę

$$\int \frac{3}{(2x + 2)^3} \, dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.6

Obliczyć całkę

$$\int \frac{1}{(x+1)^5} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.7

Obliczyć całkę

$$\int \frac{2}{(4-2x)^5} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.8

Obliczyć całkę

$$\int -\frac{2}{(-x-2)^5} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.9

Obliczyć całkę

$$\int -\frac{3}{(3x-3)^6} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.10

Obliczyć całkę

$$\int -\frac{2}{(4-2x)^5} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.11

Obliczyć całkę

$$\int \frac{1}{(4x+2)^5} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.12

Obliczyć całkę

$$\int \frac{5}{(-3x-1)^7} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.13

Obliczyć całkę

$$\int \frac{1}{(3x+4)^7} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.14

Obliczyć całkę

$$\int \frac{1}{(2x+5)^7} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.15

Obliczyć całkę

$$\int \frac{4}{(3x+4)^5} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.16

Obliczyć całkę

$$\int \frac{2}{(-2x-1)^2} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.17

Obliczyć całkę

$$\int \frac{1}{(4-x)^4} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.18

Obliczyć całkę

$$\int -\frac{2}{(5x+5)^3} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.19

Obliczyć całkę

$$\int \frac{2}{(4x+3)^3} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.3.20

Obliczyć całkę

$$\int -\frac{3}{(x+5)^7} dx$$

Rozwiązanie:

4.4 Całkowanie ułamków prostych 2-go rodzaju**Zadanie 4.4.1**

Obliczyć całkę

$$\int \frac{2x - 2}{2x^2 + 2x + 5} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.2

Obliczyć całkę

$$\int -\frac{x}{-x^2 + 2x - 3} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.3

Obliczyć całkę

$$\int \frac{-x - 1}{x^2 + 4x + 5} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.4

Obliczyć całkę

$$\int \frac{3 - x}{x^2 + 3} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.5

Obliczyć całkę

$$\int \frac{-4x - 2}{x^2 + x + 5} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.6

Obliczyć całkę

$$\int -\frac{2}{2x^2 - x + 2} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.7

Obliczyć całkę

$$\int \frac{x + 5}{2x^2 - 3x + 2} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.8

Obliczyć całkę

$$\int \frac{4x - 2}{x^2 - x + 5} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.9

Obliczyć całkę

$$\int \frac{2 - 4x}{-x^2 + x - 2} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.10

Obliczyć całkę

$$\int \frac{2x + 2}{-x^2 - 2x - 3} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.11

Obliczyć całkę

$$\int \frac{2x + 4}{-2x^2 - 2x - 1} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.12

Obliczyć całkę

$$\int \frac{x + 4}{x^2 + 3} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.13

Obliczyć całkę

$$\int \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 4} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.14

Obliczyć całkę

$$\int -\frac{4x}{x^2 + 3} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.15

Obliczyć całkę

$$\int \frac{1}{2x^2 - x + 1} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.16

Obliczyć całkę

$$\int -\frac{1}{-x^2 + 3x - 3} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.17

Obliczyć całkę

$$\int -\frac{2x}{x^2 + 5} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.18

Obliczyć całkę

$$\int \frac{x - 2}{x^2 - 2x + 3} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.19

Obliczyć całkę

$$\int \frac{6x + 6}{x^2 + 2x + 2} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.4.20

Obliczyć całkę

$$\int \frac{4 - 2x}{2x^2 - 3x + 2} dx$$

Rozwiązanie:

4.5 Całkowanie funkcji wymiernych

Zadanie 4.5.1

Obliczyć całkę

$$\int \frac{3x^2 + 13x + 16}{x^3 + 8x^2 + 20x + 16} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.2

Obliczyć całkę

$$\int \frac{2}{x^2 + 8x + 16} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.3

Obliczyć całkę

$$\int \frac{3x^4 + 15x^3 + 24x^2 + 17x + 7}{x^5 + 7x^4 + 21x^3 + 35x^2 + 32x + 12} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.4

Obliczyć całkę

$$\int -\frac{1}{x+4} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.5

Obliczyć całkę

$$\int \frac{-4x^2 + 9x - 11}{x^3 - 5x^2 + 5x - 4} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.6

Obliczyć całkę

$$\int \frac{-x^4 + x^3 + 6x^2 - 12x - 48}{x^5 - 2x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 36x + 27} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.7

Obliczyć całkę

$$\int \frac{-2x^5 + 20x^4 - 78x^3 + 136x^2 - 108x + 44}{x^6 - 9x^5 + 31x^4 - 54x^3 + 55x^2 - 33x + 9} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.8

Obliczyć całkę

$$\int \frac{-2x^2 - 3x + 6}{x^3 + 5x^2 + 6x + 8} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.9

Obliczyć całkę

$$\int \frac{-x - 8}{x^2 - 2x - 8} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.10

Obliczyć całkę

$$\int \frac{3}{x+4} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.11

Obliczyć całkę

$$\int \frac{-2x^5 + 11x^4 + 2x^3 + 40x^2 - 162x + 192}{x^6 - 4x^5 - 3x^4 + 26x^3 - 32x^2 - 24x + 144} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.12

Obliczyć całkę

$$\int \frac{-x^2 - 4x + 4}{x^3 + 5x^2 + 10x + 12} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.13

Obliczyć całkę

$$\int \frac{3x^2 + 7x + 6}{x^3 + 5x^2 + 7x + 3} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.14

Obliczyć całkę

$$\int \frac{2x^3 + 9x^2 + 3x + 4}{x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 20x + 16} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.15

Obliczyć całkę

$$\int \frac{3}{x^2 - 6x + 9} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.16

Obliczyć całkę

$$\int \frac{1}{x+1} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.17

Obliczyć całkę

$$\int -\frac{3}{x-1} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.18

Obliczyć całkę

$$\int \frac{-2x^2 - 7x - 9}{x^3 - 2x^2 + x - 12} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.19

Obliczyć całkę

$$\int -\frac{2}{x+4} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.20

Obliczyć całkę

$$\int \frac{5}{x^2 - 3x - 4} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.21

Obliczyć całkę

$$\int \frac{x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 13x + 18}{x^3 + 4x^2 + 5x + 6} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.22

Obliczyć całkę

$$\int \frac{x^6 + 6x^5 + 7x^4 + 18x^3 + 73x^2 - 15x + 156}{x^4 + 7x^3 + 12x^2 + 16x + 64} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.23

Obliczyć całkę

$$\int \frac{2x^4 + 18x^3 + 46x^2 + 16x - 30}{x^2 + 8x + 16} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.24

Obliczyć całkę

$$\int \frac{x^6 - 7x^5 + 12x^4 - 11x^3 + 28x^2 + 40x + 77}{x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 24x + 48} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.25

Obliczyć całkę

$$\int \frac{2x^3 + 2x^2 - 2}{x + 1} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.26

Obliczyć całkę

$$\int \frac{2x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 8x + 12}{x^3 - 3x^2 + 2x - 6} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.27

Obliczyć całkę

$$\int \frac{x^5 + 6x^4 + 6x^3 - 18x^2 - 23x + 8}{x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.28

Obliczyć całkę

$$\int \frac{-x^6 + 5x^5 - 9x^4 + 7x^3 + 8x^2 - 16x + 14}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 11x + 6} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.29

Obliczyć całkę

$$\int \frac{-x^7 - 2x^6 + 4x^5 - 8x^4 + 24x^3 + 6x^2 + 6x + 24}{x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 12x^2} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.30

Obliczyć całkę

$$\int \frac{-x^8 + 6x^7 - 17x^6 + 36x^5 - 57x^4 + 40x^3 - 11x^2 - 24x + 24}{x^6 - 4x^5 + 7x^4 - 12x^3 + 12x^2} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.31

Obliczyć całkę

$$\int \frac{x^6 - 3x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 4x + 3}{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.32

Obliczyć całkę

$$\int \frac{x^4 + 5x^3 - 13x^2 - 91x - 68}{x^3 + 4x^2 - 16x - 64} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.33

Obliczyć całkę

$$\int \frac{-x^3 - x^2 + 4x - 3}{x + 3} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.34

Obliczyć całkę

$$\int \frac{-2x^3 - 8x^2 - 6x + 2}{x + 3} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.35

Obliczyć całkę

$$\int \frac{-x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 19x + 10}{x^2 - 6x + 8} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.36

Obliczyć całkę

$$\int \frac{-2x^8 - 6x^7 + 26x^6 + 14x^5 - 126x^4 + 352x^3 - 252x^2 - 56x + 28}{x^6 + 3x^5 - 13x^4 - 8x^3 + 60x^2 - 160x + 192} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.37

Obliczyć całkę

$$\int \frac{-2x^6 + 3x^5 - x^4 + 17x^3 + 14x^2 + 2x + 27}{x^4 - x^3 - x^2 - 11x - 12} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.38

Obliczyć całkę

$$\int \frac{x^5 + 2x^4 - x^3 - x^2 + 5x + 5}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.39

Obliczyć całkę

$$\int \frac{-x^6 - 2x^5 + 7x^4 + 17x^3 + 27x^2 + 16x}{x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 18x - 18} dx$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.5.40

Obliczyć całkę

$$\int \frac{2x^5 + x^4 - 10x^3 + 18x^2 - 6x + 6}{x^3 + x^2 - 4x + 6} dx$$

Rozwiązanie:

5 Całka oznaczona

5.1 Pole obszaru

Zadanie 5.1.1

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -2x^2 + 5x + 4 \quad \text{oraz} \quad g(x) = x + 4$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.2

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = x^2 - x - 2 \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x - 1$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.3

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 2x^2 + 5x - 2 \quad \text{oraz} \quad g(x) = x - 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.4

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = x^2 - 2x \quad \text{oraz} \quad g(x) = 4 - 2x$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.5

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -x^2 + 5x + 4 \quad \text{oraz} \quad g(x) = 4 - 2x$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.6

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 2x^2 - 2 \quad \text{oraz} \quad g(x) = 2x + 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.7

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = x^2 - 3 \quad \text{oraz} \quad g(x) = x - 1$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.8

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -2x^2 + x + 2 \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x - 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.9

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -x^2 + 3x + 3 \quad \text{oraz} \quad g(x) = 3 - 2x$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.10

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -2x^2 + 3x - 3 \quad \text{oraz} \quad g(x) = x - 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.11

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -2x^2 - x + 5 \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x - 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.12

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 2x^2 + 2x \quad \text{oraz} \quad g(x) = -2x$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.13

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = x^2 + 5x - 2 \quad \text{oraz} \quad g(x) = 5 - x$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.14

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 2x^2 - 2x + 2 \quad \text{oraz} \quad g(x) = 4 - 2x$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.15

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = x^2 + 3x + 2 \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x - 1$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.16

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -x^2 - 2x + 2 \quad \text{oraz} \quad g(x) = x + 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.17

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -x^2 - 3x - 1 \quad \text{oraz} \quad g(x) = 2x + 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.18

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -2x^2 + 2x + 1 \quad \text{oraz} \quad g(x) = 1 - 2x$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.19

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -2x^2 + 5x - 2 \quad \text{oraz} \quad g(x) = 2 - x$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.20

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -2x^2 + 5x + 4 \quad \text{oraz} \quad g(x) = 4 - x$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.21

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 2x^2 + x - 3 \quad \text{oraz} \quad g(x) = -2x^2 - 3x - 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.22

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 2x^2 - 2 \quad \text{oraz} \quad g(x) = x^2 - 2x + 1$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.23

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -2x^2 + 2x - 1 \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x^2 + 3x - 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.24

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -x^2 - 3x - 3 \quad \text{oraz} \quad g(x) = -2x^2 + 2x - 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.25

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = x^2 + 4 \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x^2 + 4x + 4$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.26

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = x^2 + 2x + 2 \quad \text{oraz} \quad g(x) = 2x^2 + x + 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.27

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -x^2 - 2x + 3 \quad \text{oraz} \quad g(x) = 2x^2 - 2x$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.28

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -x^2 + 5x + 3 \quad \text{oraz} \quad g(x) = x^2 + x - 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.29

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -x^2 - 3x + 1 \quad \text{oraz} \quad g(x) = 2x^2 - 3x - 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.30

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 2x^2 + 4x + 3 \quad \text{oraz} \quad g(x) = 3 - 2x^2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.31

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -x^2 + 5x - 3 \quad \text{oraz} \quad g(x) = 2x^2 + 2x - 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.32

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = x^2 + 5x + 5 \quad \text{oraz} \quad g(x) = 2x^2 + 5x + 4$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.33

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -2x^2 - x + 1 \quad \text{oraz} \quad g(x) = x^2 - x - 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.34

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -x^2 - x + 4 \quad \text{oraz} \quad g(x) = x^2 + 5x + 4$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.35

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 2 \quad \text{oraz} \quad g(x) = -2x^2 - 2x - 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.36

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -x^2 - 2x \quad \text{oraz} \quad g(x) = -2x^2 + 2x + 5$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.37

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -x^2 - 2x + 2 \quad \text{oraz} \quad g(x) = 5 - 2x^2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.38

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -x^2 + 3x \quad \text{oraz} \quad g(x) = -2x^2 + 2x + 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.39

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = x^2 + 3x - 3 \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x^2 - x + 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.40

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 2x^2 \quad \text{oraz} \quad g(x) = -2x^2 + 4x$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.41

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -2x - 3 \quad \text{oraz} \quad g(x) = x^3 - 3x - 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.42

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 4x - 1 \quad \text{oraz} \quad g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.43

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 1 - 4x \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x^3 + x^2 - 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.44

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -3x - 1 \quad \text{oraz} \quad g(x) = -3x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.45

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 3 - 3x \quad \text{oraz} \quad g(x) = x^3 + 5x^2 + x + 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.46

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 4x \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x^3 - 3x^2 + 2x$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.47

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -4x - 1 \quad \text{oraz} \quad g(x) = x^3 + 4x^2 - x - 1$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.48

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 2x - 2 \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.49

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 2x + 4 \quad \text{oraz} \quad g(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 4$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.50

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = x - 1 \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x^3 - 2x^2 + 2x + 1$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.51

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 3x - 2 \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x^3 + 5x^2 - x - 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.52

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = x + 4 \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x^3 + x^2 + 5x$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.53

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -3x - 3 \quad \text{oraz} \quad g(x) = -3x^3 - 3x^2 + 3x - 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.54

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 1 - 2x \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x^3 + x^2 + 2x - 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.55

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 1 - 4x \quad \text{oraz} \quad g(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.56

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 1 - x \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.57

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -x - 2 \quad \text{oraz} \quad g(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.58

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 3 - 3x \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.59

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 3 - 4x \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.60

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = 4x + 5 \quad \text{oraz} \quad g(x) = 3x^3 + 3x^2 - 2x + 5$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.61

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{5}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = 6x^2 - 5x - 6$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.62

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{4}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = 3x^2 + 4x - 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.63

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{5}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x^2 - 5x + 1$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.64

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = 6x^2 - x - 4$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.65

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{5}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -3x^2 + 5x + 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.66

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = 4x^2 + 2x - 4$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.67

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{4}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = 3x^2 - 4x - 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.68

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{6}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = x^2 + 4x + 1$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.69

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{4}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -3x^2 - 5x + 4$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.70

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = 6x^2 + x - 6$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.71

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{5}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = 6x^2 + 5x - 6$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.72

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{6}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -2x^2 + 5x + 1$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.73

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = 2x^2 - x - 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.74

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{6}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = 3x^2 - 6x - 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.75

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{5}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -2x^2 - 5x + 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.76

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{5}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -2x^2 + 5x + 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.77

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{4}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -2x^2 - 4x + 2$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.78

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -6x^2 + x + 4$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.79

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{6}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = x^2 + 4x + 1$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.80

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{5}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = 6x^2 - 5x - 6$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.81

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x^2 + \frac{7x}{2} - \frac{7}{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.82

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -\frac{x^2}{2} - 3x - \frac{11}{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.83

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -\frac{3x^2}{2} + \frac{11x}{2} - 6$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.84

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{3}{2x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x^2 - \frac{9x}{2} - 5$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.85

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{1}{2x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \frac{3x^2}{4} + \frac{5x}{2} + \frac{9}{4}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.86

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{3}{2x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -2x^2 - 6x - \frac{11}{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.87

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{1}{2x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{5x}{2} + \frac{9}{4}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.88

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -\frac{3x^2}{2} - \frac{11x}{2} - 6$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.89

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{3}{4x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{9x}{4} - \frac{5}{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.90

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{3}{4x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{9x}{4} + \frac{5}{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.91

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{1}{2x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -3x^2 - \frac{11x}{2} - 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.92

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = x^2 - \frac{7x}{2} + \frac{7}{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.93

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -\frac{3x^2}{2} + 5x - \frac{9}{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.94

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{3}{2x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = x^2 - \frac{9x}{2} + 5$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.95

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{1}{2x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{5x}{2} + \frac{9}{4}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.96

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -\frac{3x^2}{2} + 5x - \frac{9}{2}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.97

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = \frac{1}{2x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{5x}{2} + \frac{9}{4}$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.98

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -\frac{3x^2}{2} + \frac{11x}{2} - 6$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.99

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{1}{2x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -3x^2 + \frac{11x}{2} - 3$$

Rozwiązanie:

Zadanie 5.1.100

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami krzywych

$$f(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = -x^2 + \frac{7x}{2} - \frac{7}{2}$$

Rozwiązanie:

6 Szeregi Fouriera

6.1 Szeregi Fouriera

Zadanie 6.1.1

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [-1, 0] \\ 2 & \text{dla } x \in (0, 1) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.2

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [-1, 0) \\ 0 & \text{dla } x \in [0, 1) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.3

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-1, 0) \\ 0 & \text{dla } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.4

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 4$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in [-2, 0) \\ 1 & \text{dla } x \in [0, 2) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.5

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 3\pi$

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in [-\frac{3\pi}{2}, 0) \\ 2 & \text{dla } x \in [0, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.6

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 3\pi$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-\frac{3\pi}{2}, 0] \\ 2 & \text{dla } x \in (0, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.7

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ 1 & \text{dla } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.8

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 4$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [-2, 0] \\ 2 & \text{dla } x \in (0, 2) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.9

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [-\pi, 0) \\ 0 & \text{dla } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.10

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-1, 0) \\ 1 & \text{dla } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.11

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0] \\ 2x + 1 & \text{dla } x \in (0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.12

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2$

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{dla } x \in [-1, 0] \\ 2 - x & \text{dla } x \in (0, 1) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.13

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{dla } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0] \\ 0 & \text{dla } x \in (0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.14

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [-\pi, 0] \\ -1 & \text{dla } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.15

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{dla } x \in (-1, 0] \\ 2 & \text{dla } x \in (0, 1] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.16

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [-\pi, 0) \\ 2x & \text{dla } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.17

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \\ 2x + 1 & \text{dla } x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.18

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{dla } x \in (-1, 0) \\ 1 - x & \text{dla } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.19

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [-1, 0) \\ 1 & \text{dla } x \in [0, 1) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.20

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ 2 & \text{dla } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.21

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 4$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-2, 0] \\ x + 2 & \text{dla } x \in (0, 2] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.22

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2$

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-1, 0] \\ 2x - 1 & \text{dla } x \in (0, 1] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.23

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{dla } x \in (-\pi, 0] \\ -1 & \text{dla } x \in (0, \pi] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.24

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [-\pi, 0) \\ -x - 1 & \text{dla } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.25

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{dla } x \in (0, 1) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.26

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ 2 & \text{dla } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.27

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 4$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in [-2, 0) \\ 2x + 2 & \text{dla } x \in [0, 2) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.28

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 4$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in [-2, 0] \\ -2x - 1 & \text{dla } x \in (0, 2) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.29

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 4$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in [-2, 0] \\ 1 & \text{dla } x \in (0, 2) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.30

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{dla } x \in [-\pi, 0) \\ 2x - 1 & \text{dla } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.31

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 4$

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{dla } x \in [-2, 0] \\ 0 & \text{dla } x \in (0, 2) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.32

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 3\pi$

$$f(x) = \begin{cases} -\sin(x) & \text{dla } x \in (-\frac{3\pi}{2}, 0] \\ -\cos(x) & \text{dla } x \in (0, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.33

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2$

$$f(x) = \begin{cases} -\cos(x) & \text{dla } x \in (-1, 0] \\ -2 & \text{dla } x \in (0, 1] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.34

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{dla } x \in (-1, 0) \\ x^2 & \text{dla } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.35

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \\ -\cos(x) & \text{dla } x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.36

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{dla } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ -x - 1 & \text{dla } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.37

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [-1, 0) \\ \sin(x) & \text{dla } x \in [0, 1) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.38

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{dla } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \\ 2 & \text{dla } x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.39

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} -\sin(x) & \text{dla } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \\ 2x & \text{dla } x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.40

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0] \\ 2 & \text{dla } x \in (0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.41

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 3\pi$

$$f(x) = \begin{cases} -\sin(x) & \text{dla } x \in (-\frac{3\pi}{2}, 0) \\ -\sin(x) & \text{dla } x \in [0, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.42

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ -x^2 & \text{dla } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.43

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 4$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x \in [-2, 0) \\ -1 & \text{dla } x \in [0, 2) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.44

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 3\pi$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x \in [-\frac{3\pi}{2}, 0) \\ -\sin(x) & \text{dla } x \in [0, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

Naszkieować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.45

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 4$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{dla } x \in (-2, 0] \\ -1 & \text{dla } x \in (0, 2] \end{cases}$$

Naszkieować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.46

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 4$

$$f(x) = \begin{cases} -\sin(x) & \text{dla } x \in (-2, 0] \\ -\sin(x) & \text{dla } x \in (0, 2] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.47

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in [-\pi, 0) \\ 2x & \text{dla } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.48

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 4$

$$f(x) = \begin{cases} -\cos(x) & \text{dla } x \in (-2, 0) \\ -\cos(x) & \text{dla } x \in [0, 2] \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.49

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = 2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{dla } x \in [-\pi, 0) \\ -\cos(x) & \text{dla } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.1.50

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję o okresie zasadniczym $2T = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} -\sin(x) & \text{dla } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \\ \cos(x) & \text{dla } x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Naszkicować wykres funkcji, do której zbieżny jest uzyskany szereg.

Rozwiązanie:

7 Funkcje dwóch zmiennych

7.1 Płaszczyzna styczna

Zadanie 7.1.1

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = 3x + \frac{x}{y} - 2y - \frac{4}{y} + \frac{5y}{x} - \frac{4}{x}$$

w punkcie $P = (-4, -1, f(-4, -1))$.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.1.2

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{4x^2 - 4y^2 + 16}}{2x + 4y}$$

w punkcie $P = (-4, -2, f(-4, -2))$.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.1.3

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{3x^2 - 3y^2}}{3x + 3y}$$

w punkcie $P = (-2, 1, f(-2, 1))$.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.1.4

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = (-4x + 2y)e^{x^2 - 2x - 4y^2 + 3y + 1}$$

w punkcie $P = (0, 1, f(0, 1))$.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.1.5

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = -4x + \frac{4x}{y} - 3y + \frac{5}{y}$$

w punkcie $P = (1, 5, f(1, 5))$.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.1.6

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = -4x^2y + 4x^2 + 2xy^3 + 4y^2$$

w punkcie $P = (-1, 0, f(-1, 0))$.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.1.7

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = 3x^3y - 2x^2y + x^2 - 2xy^3 - 3y^2$$

w punkcie $P = (1, 0, f(1, 0))$.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.1.8

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{-2x^2 - 5y^2 + 16}}{5x + y}$$

w punkcie $P = (-1, 1, f(-1, 1))$.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.1.9

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = xe^{-2x^2 - 4x - y - 4}$$

w punkcie $P = (-1, -2, f(-1, -2))$.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.1.10

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 + 4}$$

w punkcie $P = (-4, -2, f(-4, -2))$.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.1.11

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{2x^2 - 3y^2 + 25}}{2x + 4y}$$

w punkcie $P = (4, 4, f(4, 4))$.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.1.12

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 + 4}$$

w punkcie $P = (2, 2, f(2, 2))$.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.1.13

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = (x + 4y) e^{-4x^2 - 2x - 2y^2 - 2y + 2}$$

w punkcie $P = (-1, 0, f(-1, 0))$.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.1.14

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = -4x^3y + x^2y - 2x^2 - 4xy^3 - 4y^2$$

w punkcie $P = (0, -1, f(0, -1))$.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.1.15

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = -x - \frac{3x}{y} + 2y - \frac{4}{y} - \frac{3y}{x} + \frac{1}{x}$$

w punkcie $P = (2, -2, f(2, -2))$.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.1.16

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = 2(x+2)^2(y-2)^2 + (4x-8)(y-1)$$

w punkcie $P = (1, 2, f(1, 2))$.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.1.17

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = (x-3)(y-4)$$

w punkcie $P = (1, 5, f(1, 5))$.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.1.18

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = (-2x - 4y) e^{-3x^2 + 5x - y^2 + 2y - 3}$$

w punkcie $P = (1, 1, f(1, 1))$.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.1.19

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = 2xe^{x^2 + 4x + 3y^2 - 3y + 3}$$

w punkcie $P = (-1, 0, f(-1, 0))$.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.1.20

Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$f(x, y) = (x-5)^2(y-5)^2 + (x-1)(y-4)$$

w punkcie $P = (5, -2, f(5, -2))$.

Rozwiązanie:

7.2 Całki podwójne po obszarze trójkątnym

Zadanie 7.2.1

Obliczyć $\iint_D \left(x + \frac{3y}{2} + 1\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0, 4), B = (0, 0), C = (1, 0)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.2

Obliczyć $\iint_D (x + y) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (4, 3), B = (0, 0), C = (0, 1)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.3

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{2} - 1\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (-3, -2), B = (0, 0), C = (2, 0)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.4

Obliczyć $\iint_D (-2x - y) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0, 0), B = (0, 1), C = (-3, 0)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.5

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{x}{2} + 2y - 1\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0, 2), B = (3, -1), C = (0, 3)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.6

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{x}{2} + y + 1\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (4, 0), B = (0, -1), C = (0, 0)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.7

Obliczyć $\iint_D \left(x + \frac{y}{2}\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (4, 3), B = (-1, 3), C = (0, 2)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.8

Obliczyć $\iint_D (0) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0, 2), B = (0, 0), C = (4, 0)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.9

Obliczyć $\iint_D \left(-x + \frac{3y}{2} + 1\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0, 0)$, $B = (2, 1)$, $C = (-2, 0)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.10

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{x}{2} + y\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (-2, 2)$, $B = (-1, 0)$, $C = (4, -1)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.11

Obliczyć $\iint_D (-3x - 3y) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (-3, -2), B = (-2, 0), C = (0, 0)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.12

Obliczyć $\iint_D (x + y - 1) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0, -1), B = (3, 0), C = (-2, 0)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.13

Obliczyć $\iint_D (-3x + 3y + 2) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (2, 0), B = (-2, 1), C = (0, 0)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.14

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{3x}{2} - y + 2\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (2, 4), B = (0, 2), C = (0, -2)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.15

Obliczyć $\iint_D \left(-2x + \frac{3y}{2} + 1\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (2, 0), B = (0, 4), C = (0, 2)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.16

Obliczyć $\iint_D \left(-3x + \frac{y}{2} - 1\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0, 0), B = (3, 0), C = (0, 1)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.17

Obliczyć $\iint_D (2y) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (-2, -1), B = (2, 2), C = (0, -1)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.18

Obliczyć $\iint_D \left(-2x + \frac{3y}{2} + 1\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (-1, -1), B = (-2, 0), C = (0, -3)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.19

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{3x}{2} + y - 1\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (2, 0), B = (-3, 3), C = (-2, 3)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.20

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{3x}{2} - y + 1\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0, 0), B = (1, -3), C = (-1, -3)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.21

Obliczyć $\iint_D (2x + 3y + 2) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (-1, -1), B = (0, 3), C = (0, -2)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.22

Obliczyć $\iint_D (2x + \frac{y}{2} + 1) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (3, 3), B = (3, 0), C = (2, 0)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.23

Obliczyć $\iint_D \left(-x + \frac{y}{2} - 1\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (4, 4), B = (1, 0), C = (0, -2)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.24

Obliczyć $\iint_D (2x - 2y - 1) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0, 0), B = (-1, -1), C = (-1, 0)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.25

Obliczyć $\iint_D (-3x + 2y + 2) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0, -3), B = (-1, 0), C = (0, 0)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.26

Obliczyć $\iint_D (2x + 3y + 2) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (-1, 4), B = (0, 0), C = (0, -2)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.27

Obliczyć $\iint_D (x+y) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0,3), B = (0,0), C = (2,0)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.28

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{x}{2} + 3y + 1\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0,4), B = (4,0), C = (0,0)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.29

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{3x}{2} - 3y + 2\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0, 4), B = (0, 0), C = (4, 3)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.30

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{x}{2} - 3y + 1\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0, 0), B = (-1, 0), C = (3, 2)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.31

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (4, 4), B = (0, 0), C = (1, -1)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.32

Obliczyć $\iint_D \left(-x + \frac{3y}{2}\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0, 0), B = (2, 3), C = (4, 3)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.33

Obliczyć $\iint_D (-2x - 2y + 2) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (-1, 1), B = (0, 3), C = (0, 1)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.34

Obliczyć $\iint_D (-3x - y + 1) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (-1, 4), B = (-2, 2), C = (0, 1)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.35

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{3x}{2} - 2y - 1\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0, -2), B = (3, 2), C = (3, 0)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.36

Obliczyć $\iint_D (2 - x) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0, 0), B = (-3, -1), C = (2, 0)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.37

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{3x}{2} + \frac{3y}{2} - 1\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0, -2), B = (-3, 2), C = (0, 0)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.38

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{x}{2} + 3y - 1\right) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0, -3), B = (0, -1), C = (-2, 0)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.39

Obliczyć $\iint_D (x - y) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0, 4), B = (0, 0), C = (-2, 0)$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.2.40

Obliczyć $\iint_D (2x + \frac{y}{2} + 2) dx dy$ gdzie D - trójkąt ABC dla $A = (0, 2), B = (-3, 2), C = (-3, 0)$

Rozwiązanie:

7.3 Całki podwójne po obszarze ograniczonym wykresami krzywych

Zadanie 7.3.1

Obliczyć $\iint_D (2-y) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = \frac{y^2}{2} - 2y$, oraz $x = 3y$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.2

Obliczyć $\iint_D (-x+2y) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = -2x^2$, oraz $y = 2x$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.3

Obliczyć $\iint_D (-y) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = \frac{y^2}{2} - 2y$, oraz $x = y$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.4

Obliczyć $\iint_D (x) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = -x^2$, oraz $y = x$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.5

Obliczyć $\iint_D \left(2x + \frac{3y}{2}\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = 2x^2 - x$, oraz $y = 3x$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.6

Obliczyć $\iint_D (3x + 1) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = 3x^2 - 1$, oraz $y = 3x - 1$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.7

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{3x}{2} + \frac{3y}{2}\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = 2 - 2x^2$, oraz $y = -2x - 2$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.8

Obliczyć $\iint_D (3x - 2y + 2) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = -2y^2 - 1$, oraz $x = -2y - 1$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.9

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{3x}{2} - 3y + 1\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = 3y^2 - y - 3$, oraz $x = -y$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.10

Obliczyć $\iint_D (-3x + 3y + 1) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}$, oraz $x = 3y + \frac{1}{2}$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.11

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{3x}{2} - y + 1\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = \frac{x^2}{2} + 1$, oraz $y = \frac{3x}{2}$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.12

Obliczyć $\iint_D \left(-x + \frac{y}{2}\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = y^2 + \frac{y}{2}$, oraz $x = \frac{3y}{2}$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.13

Obliczyć $\iint_D (1-y) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = -x^2 - 1$, oraz $y = x - 1$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.14

Obliczyć $\iint_D (x+2) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$, oraz $y = x$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.15

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{x}{2} + 2y + 1\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = -3y^2 + y + 2$, oraz $x = y - 1$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.16

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{x}{2} + 3y - 1\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = \frac{y^2}{2} + 2y + 3$, oraz $x = -y - 1$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.17

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{3x}{2} + \frac{y}{2}\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = -x^2 - x$, oraz $y = -3x$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.18

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{3y}{2}\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = y^2 + y$, oraz $x = -3y$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.19

Obliczyć $\iint_D (-3x) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = \frac{3x^2}{2} + 3x - 3$, oraz $y = \frac{3x}{2}$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.20

Obliczyć $\iint_D (3x - y) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = -y^2 + 2y$, oraz $x = 3y$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.21

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = -2x^2 + 3x - 2$, oraz $y = -x - 2$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.22

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{3x}{2} + 3y\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = x^2 - 3x$, oraz $y = x$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.23

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{3x}{2} + \frac{y}{2} - 1\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = \frac{x^2}{2}$, oraz $y = \frac{3x}{2} - 1$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.24

Obliczyć $\iint_D (-x - 3y) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = -3y^2 + y + \frac{1}{2}$, oraz $x = \frac{1}{2} - 2y$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.25

Obliczyć $\iint_D (y+1) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = x^2 + x$, oraz $y = 2x + 2$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.26

Obliczyć $\iint_D (2y+1) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = x^2 + x$, oraz $y = 3x$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.27

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{3x}{2}\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = -3x^2$, oraz $y = 3x$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.28

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{3y}{2}\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = -2y^2 - 3y - 1$, oraz $x = -3y - 3$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.29

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{y}{2}\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = \frac{x^2}{2}$, oraz $y = -3x$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.30

Obliczyć $\iint_D \left(-x + \frac{3y}{2} - 1\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = y^2 - y$, oraz $x = -3y$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.31

Obliczyć $\iint_D (-2x - 2y) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = y^2 + y$, oraz $x = 3 - y$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.32

Obliczyć $\iint_D (x) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = 3y^2$, oraz $x = 3y$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.33

Obliczyć $\iint_D (-3y - 1) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = y^2 + 3y + 1$, oraz $x = 1 - y$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.34

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{3x}{2}\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = -y^2 + 3y$, oraz $x = y$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.35

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{x}{2} + 2\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = \frac{y^2}{2}$, oraz $x = 2y$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.36

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{x}{2} + 2\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2}$, oraz $y = 2x + 1$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.37

Obliczyć $\iint_D (-3x - 3y + 2) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = -x^2 - x - 2$, oraz $y = 3x + 1$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.38

Obliczyć $\iint_D \left(-2x + \frac{y}{2}\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = \frac{y^2}{2} - 1$, oraz $x = \frac{y}{2}$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.39

Obliczyć $\iint_D \left(\frac{x}{2} + y - 1\right) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $x = -3y^2 + 3y$, oraz $x = 3y - 3$

Rozwiązanie:

Zadanie 7.3.40

Obliczyć $\iint_D (-2x + y) dx dy$ gdzie D - obszar ograniczony krzywymi $y = 2x^2 + 2x + \frac{3}{2}$, oraz $y = \frac{3}{2} - 2x$

Rozwiązanie: