

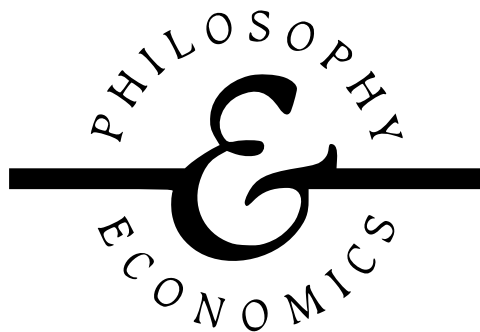
# Vorlesung: Grundlagen des Entscheidens I

Sommersemester 2009

Stand: 29. Juni 2009

*(in Überarbeitung!!!)*

Dozent: Eckhart Arnold



Universität Bayreuth



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Techniken des Entscheidens</b>	<b>7</b>
1.1	Entscheidungstabellen und -bäume . . . . .	7
1.1.1	Einleitung . . . . .	7
1.1.2	Der Gegenstand der Entscheidungstheorie . . . . .	8
1.1.3	Darstellungsformen . . . . .	12
1.1.4	Literaturhinweise . . . . .	20
1.1.5	Aufgaben . . . . .	22
1.2	Entscheidungen unter Unwissenheit I . . . . .	24
1.2.1	Die einfachste Entscheidungsregel: Das Prinzip der Do- minanz . . . . .	24
1.2.2	Präferenzen . . . . .	26
1.2.3	Ordinale Nutzenfunktionen . . . . .	32
1.2.4	Entscheidungsregeln auf Basis des ordinalen Nutzens . . . . .	34
1.2.5	Aufgaben . . . . .	39
1.3	Entscheidungen unter Unwissenheit II . . . . .	41
1.3.1	Die Minimax-Bedauerns-Regel . . . . .	41
1.3.2	Kardinaler Nutzen . . . . .	46
1.3.3	Weitere Entscheidungsregeln auf Basis des kardinalen Nutzens . . . . .	53
1.3.4	Aufgaben . . . . .	63
1.4	Entscheidungen unter Risiko . . . . .	65
1.4.1	Die Berechnung des Erwartungsnutzens . . . . .	66
1.4.2	Die Rechtfertigung des Erwartungsnutzens . . . . .	71
1.4.3	Kausale Entscheidungstheorie . . . . .	73
1.4.4	Entscheidungsregeln in der Philosophie: Die Debatte zwischen John Rawls und John C. Harsanyi . . . . .	74
1.4.5	Aufgaben . . . . .	79

<b>2</b>	<b>Zur Theorie der Kollektiven Entscheidungen</b>	<b>81</b>
2.1	Sozialwahltheorie . . . . .	81
2.1.1	Zum Einstieg: Das Condorcet-Paradox . . . . .	84
2.1.2	Das sogenannte „Paradox des Liberalismus“ . . . . .	87
2.1.3	Der „Klassiker“ der Sozialwahltheorie: Der Satz von Arrow . . . . .	91
2.1.4	Aufgaben . . . . .	108
2.2	Zur Diskussion der Sozialwahltheorie . . . . .	112
2.2.1	Der Satz von Arrow als Widerlegung der „identären“ Demokratie . . . . .	113
2.3	Die These des „demokratischen Irrationalismus“ . . . . .	123
2.3.1	Historische Beispiele . . . . .	125
2.4	Fazit . . . . .	132
2.4.1	Aufgaben . . . . .	134
<b>3</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	<b>135</b>
3.1	Wahrscheinlichkeiten I: Rechentechniken . . . . .	135
3.1.1	Einführung . . . . .	135
3.1.2	Grundlegende Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung	138
3.1.3	Der Bayes'sche Lehrsatz . . . . .	145
3.1.4	Aufgaben . . . . .	152
3.2	Wahrscheinlichkeiten II: Interpretationsfragen <b>nicht klausurrelevant!</b> ) . . . . .	156
3.2.1	Objektive Wahrscheinlichkeit . . . . .	157
3.2.2	Subjektive Wahrscheinlichkeiten . . . . .	169
3.2.3	Aufgaben . . . . .	180
<b>4</b>	<b>Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie</b>	<b>183</b>
4.1	Die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie . . . . .	183
4.1.1	Vorbereitung des Beweises . . . . .	187
4.1.2	Existenz der Nutzenfunktion . . . . .	188
4.1.3	Eindeutigkeit der Nutzenfunktion . . . . .	190
4.1.4	Die Bedeutung der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie . . . . .	192
4.1.5	Aufgaben . . . . .	195
4.2	Diskussion der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie . . . . .	197
4.2.1	Unterschiedliche Lesarten der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie . . . . .	197
4.2.2	„Paradoxien“ der Nutzentheorie . . . . .	207
4.2.3	Aufgaben . . . . .	214

<b>5</b>	<b>Spieltheorie</b>	<b>217</b>
5.1	Spieltheorie I: Einführung . . . . .	217
5.1.1	Was „Spiele“ im Sinne der Spieltheorie sind . . . . .	217
5.1.2	Nullsummenspiele . . . . .	224
5.1.3	Aufgaben . . . . .	230
5.2	Spieltheorie II: Vertiefung und Anwendung . . . . .	232
5.2.1	Nicht-Nullsummenspiele . . . . .	232
5.2.2	Wiederholte Spiele . . . . .	240
5.2.3	Evolutionäre Spieltheorie . . . . .	244
5.2.4	Ein Anwendungsbeispiel der Spieltheorie, das funktioniert: Vertrauen bei Internetauktionen . . . . .	255
5.2.5	Aufgaben . . . . .	261
<b>6</b>	<b>Kritische Reflexion</b>	<b>263</b>
6.1	Wissenschaftskritische Diskussion der Reichweite und Grenzen der formalen Entscheidungstheorie in der Philosophie . . . . .	263
<b>7</b>	<b>Beispielklausur</b>	<b>265</b>
7.1	Klausurvorbereitung und Klausur . . . . .	265
7.1.1	Aufgaben zur Klausurvorbereitung . . . . .	265
7.1.2	Die Klausur . . . . .	270
7.1.3	Die Lösung . . . . .	273
7.2	Literatur . . . . .	276



# Kapitel 1

## Techniken des Entscheidens

### 1.1 Entscheidungstabellen und -bäume

#### 1.1.1 Einleitung

Die Vorlesung „Grundlagen des Entscheidens I“ hat das Ziel – aus philosophischer Perspektive – in die Entscheidungs- und Spieltheorie einzuführen. Dabei geht es vor allem um die Vermittlung von Grundlagen und elementaren Lösungs- und Rechentechniken, d.h. wir werden untersuchen, wie man Entscheidungsprobleme als Tabellen oder Entscheidungsbäume darstellt, wie Entscheidungen unter Risiko (d.h. bei bekannten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten unbeeinflussbarer Ereignisse) und unter Unwissen (bei unbekannten Wahrscheinlichkeiten) getroffen werden können, wie die strategische Interaktion zwischen mehreren menschlichen Entscheidern mit Hilfe spieltheoretischer Modelle dargestellt werden kann und vieles mehr. Dabei werden wir uns immer auch mit den philosophischen Interpretationsfragen dieser Techniken beschäftigen, sowie mit theoretischen Einwänden, von denen es zahlreiche gibt.

Ausgespart bleibt in den „Grundlagen des Entscheidens I“ jedoch weitgehend die Frage der Anwendung dieser Theorie in verschiedenen empirischen Wissenschaftsbereichen. Die Anwendbarkeit der Spiel- und Entscheidungstheorie ist je nach Wissenschaftsbereich mehr oder weniger stark umstritten. Während sie in der Ökonomie gewissermaßen kanonisch ist, wird ihr Wert für die Sozial- und Politikwissenschaften oft bestritten. Besonders die Veröffentlichung von Donald Greens und Ian Shapiros Buch „The Pathologies of Rational Choice“ Green and Shapiro (1994), ein Werk, das die Anwendung ökonomischer Modelle im Bereich der Politikwissenschaften einer detaillierten und präzisen Kritik unterzieht, hat eine sehr kontroverse Diskussion über den Wert und Unwert des ökonomischen Theorieansatzes in den Politikwis-

senschaften hervorgerufen. Wenn Zeit bleibt, werden wir am Ende des Semesters an einem Beispiel untersuchen, worum es bei der Kritik von Green und Shapiro geht, und aus welchen Gründen die Anwendung der Spiel- und Entscheidungstheorie sowie das ihr zu Grunde liegende „Rational Choice“ Paradigma<sup>1</sup> außerhalb des engeren Kreises der Wirtschaftswissenschaften meist zum Scheitern verurteilt ist.

### 1.1.2 Der Gegenstand der Entscheidungstheorie

Grund-  
elemente:  
1.Zustände  
2.Handlungen  
3.Ergebnisse

Die Entscheidungstheorie, die in dieser Vorlesung vorgestellt wird, ist eine formale Theorie davon, wie man in Entscheidungssituationen bestmögliche Entscheidungen trifft. Eine *Entscheidungssituation* ist dabei charakterisiert durch 1) eine Menge von möglichen (Welt-)Zuständen, von denen wir entweder nicht wissen, in welchem dieser möglichen Zustände sich die Welt tatsächlich befindet (epistemische Unsicherheit), oder bei denen noch nicht feststeht, welcher Zustand eintreten wird (reale Unsicherheit), 2) eine Menge von *Handlungsalternativen* und 3) eine Menge von *Ergebnissen*, deren Realisierung von der gewählten Handlung und dem bestehenden bzw. dem eingetretenen (Welt-)Zustand abhängt.

Kann man eine bestimmte Entscheidungssituation überhaupt in dieser Form analysieren, dann lässt sich das Entscheidungsproblem sehr leicht schematisch in einer Tabelle darstellen:

		Zustand	
Handlung		schwere Klausur	leichte Klausur
	lernen	<i>bestehen</i>	<i>bestehen</i>
	schwimmen gehen	<i>durchfallen</i>	<i>bestehen</i>

Die Zeilen repräsentieren in dieser Tabelle unterschiedliche Handlungsalternativen, die Spalten stellen die verschiedenen Weltzustände dar. Die den Handlungen und Zuständen zugeordneten Ergebnisse stehen in den entsprechenden Zeilen und Spalten innerhalb der Tabelle. Diese Tabelle gibt natürlich nur ein äußerst einfaches Entscheidungsproblem wieder. Ebenso gut könnte man sich eine größere Tabelle mit mehr Handlungsalternativen, z.B. „lernen und mitschreiben“, „schwimmen gehen und mitschreiben“, „krank schreiben lassen“, oder mit mehr Zuständen, z.B. „schwere“, „leichte“ und „mittelschwere Klausur“, vorstellen.

<sup>1</sup>Unter dem „Rational Choice“ Paradigma wird hier die Auffassung verstanden, dass alle Menschen strikte Nutzenmaximierer sind, und dass sich sowohl das menschliche Handeln als auch gesellschaftliche Strukturen restlos und allein aus diesem Prinzip erklären lassen.



Bei der Analyse realer Entscheidungsprobleme stellt es oft eine Herausforderung dar, alle Zustände und Handlungsalternativen zu identifizieren bzw. eine geeignete Einteilung dafür zu finden. Insbesondere dürfen sich die Handlungsalternativen untereinander (und ebenso die Zustände untereinander) nicht überschneiden, das Ergebnis muss eindeutig von den Handlungen abhängen und es sollten *alle* möglichen Zustände berücksichtigt werden, die Einfluss auf das Ergebnis haben können. Vergisst man irgendwelche Zustände, die Einfluss auf das Ergebnis haben können, in der Entscheidungstabelle zu berücksichtigen, so besteht die Gefahr, dass man unangenehme Überraschungen erlebt, indem Ergebnisse eintreten, mit denen man nicht gerechnet hat. Versäumt man umgekehrt, mögliche Handlungsalternativen zu berücksichtigen, so schränkt man nur die eigene Entscheidungsfreiheit unnötig ein, wird aber bei ansonsten korrekter Analyse keine Überraschungen erleben. Mit diesen Schwierigkeiten, die die *Problemspezifikation* betreffen, werden wir uns in dieser Vorlesungsreihe jedoch nur am Rande beschäftigen. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass die korrekte Spezifikation des Entscheidungsproblems eine hochgradig nicht-triviale Aufgabe sein kann, und dass die praktische Anwendbarkeit der Entscheidungstheorie auch davon abhängig ist, ob es in einer gegebenen Situation überhaupt möglich ist, eine zuverlässige Problemspezifikation im Sinne der Entscheidungstheorie zu geben.

Das Problem  
der Problems-  
spezifikation

Abgesehen von den Schwierigkeiten, die sich bei der Problemspezifikation ergeben können, ist die Anwendbarkeit der Entscheidungstheorie aber auch aus systematischen Gründen auf ganz bestimmte Entscheidungsprobleme eingeschränkt. So kann sie uns z.B. wenig weiterhelfen, wenn wir uns über die Ergebnisse bzw. die Bewertung der Ergebnisse einer Entscheidungssituation selbst nicht im Klaren sind. Die Frage, ob jemand im Urlaub lieber ans Meer oder in die Berge fahren will, stellt ganz sicher ein Entscheidungsproblem dar, aber es handelt sich nicht um ein Entscheidungsproblem von der Sorte, bei der uns die Entscheidungstheorie viel weiterhelfen kann. Vielmehr handelt es sich um ein Problem, bei dem man sich über die eigenen Präferenzen klar werden muss, man könnte auch sagen: um ein Problem, bei dem man sich einfach entscheiden muss. In Anlehnung an bestimmte Doktrinen in der Moralphilosophie bzw. in der politischen Philosophie könnte man hier vielleicht von einem „*dezisionistischen* Entscheidungsproblem“ sprechen.

Systematische  
Grenzen der  
Anwendbar-  
keit:

1. Unent-  
schlossenheit  
hinsichtlich der  
Zielsetzung

Weiterhin setzt die Entscheidungstheorie voraus, dass wir wissen, welche möglichen Ergebnisse als Folge der von uns getroffenen Entscheidungen überhaupt eintreten können. Es gibt aber viele Situationen, in denen die möglichen Folgen unserer Handlungen für uns schlicht unabsehbar sind. So können wir zwar absehen, dass sich der  $CO_2$  Gehalt in der Atmosphäre in Zukunft erhöhen wird, wenn wir die Entscheidung treffen, den  $CO_2$  Ausstoß nicht zu verringern, und mit einer – allerdings schon erheblich größeren Un-

2. Unwissenheit  
hinsichtlich der  
möglichen  
Ergebnisse

sicherheit – können uns die Wissenschaftler sagen, dass sich dann das Klima erwärmen wird, aber wie sich die Erwärmung und die daraus resultierenden klimatischen Veränderungen gesellschaftlich und politisch auswirken werden, darüber können wir nur spekulieren. Bei Entscheidungen, bei denen wir die Menge der möglichen Ergebnisse nicht angeben können, weil wir es dabei mit „unknown unknowns“ zu tun haben, stehen wir mit der formalen Entscheidungstheorie natürlich auf verlorenem Posten. In Bezug auf den Klimawandel ist daher auch schon der Vorschlag gemacht worden statt des auf der Entscheidungstheorie fußenden Utilitarismus, verstärkt einen tugendethischen Ansatz in Anschlag zu bringen (Hillerbrand, 2006, 155ff., 230ff.).<sup>2</sup>

Damit scheiden neben den Entscheidungsproblemen, die aus praktischen Gründen keine adäquate Problemspezifikation zulassen, viele weitere wichtige Entscheidungsprobleme aus dem Anwendungsbereich der formalen Entscheidungstheorie schon von vornherein aus. Es ist wichtig sich diesen Sachverhalt, dass die Entscheidungstheorie nur einen Teil der realen Entscheidungsprobleme adäquat behandeln kann, vor Augen zu halten. Denn dies bedeutet, dass die Entscheidungstheorie, die wir hier besprechen, nicht notwendigerweise die Theorie der Entscheidungen schlechthin ist. Oft ist es der Fall, dass wir diejenigen Entscheidungsprobleme, für die diese Theorie ungeeignet ist, immer noch im Rahmen anderer, von ihrem Stil her vielleicht ganz andersartiger Theorien und Ansätze behandeln können, so wie für die Ethik des Klimaschutzes eine Tugendethik vorgeschlagen worden ist, um den Schwierigkeiten des Utilitarismus angesichts extremer Unsicherheit („unknown unknowns“) zu begegnen.

Nachteile des  
methodenzen-  
trierten  
Ansatzes

In noch einmal verschärfter Form stellt sich dasselbe Problem für die Spieltheorie, deren empirische Anwendungsfälle außerhalb der Ökonomie eher dünn gesät sind. Die Gefahr besteht daher, dass man durch die einseitige Konzentration auf solche Probleme, die sich mit Hilfe derartiger Theorien methodisch in den Griff bekommen lassen, ein völlig falsches Bild von dem empirischen Sachbereich bekommt, auf den sie sich beziehen, und von dem sie nur einen kleinen Ausschnitt erfassen können, der in Wahrheit aber größtenteils ganz anderen Gesetzen gehorcht. Dass diese Gefahr vornehmlich bei szientistischen, d.h. sich strenger und formaler Methoden nach dem Vorbild der Naturwissenschaften bedienender Ansätze auftritt, hängt mit der Methodenzentriertheit dieser Ansätze zusammen, die dazu führt, dass vornehmlich solche Probleme als wissenschaftlich relevant ausgewählt und der Untersuchung für wert befunden werden, die zum vorgegebenen Methoden-

<sup>2</sup>Da das Buch ansonsten sehr stark dem utilitaristischen Ansatz verpflichtet ist, vor allem auch gegen die nicht-anthropozentrische Naturethik etwa eines H. Jonas, wird man hinter diesem Vorschlag keine grundsätzliche Ablehnung des Utilitarismus oder wissenschaftliche Unbedarftheit vermuten dürfen.

kanon passen, anstatt umgekehrt zu gegebenen empirischen Problemen und Fragestellungen die zur ihrer Behandlung geeigneten Methoden auszuwählen. A priori sind übrigens der methodenzentrierte Ansatz und sein Gegenstück, der problemorientierte Ansatz, gleichermaßen legitim. Nur ist die Gefahr der intellektuellen Selbsttäuschung beim methodenzentrierten Ansatz offenbar erheblich größer und tritt daher genau da auf, wo wir sie am wenigsten erwarten würden, nämlich dort, wo auch das Bewusstsein wissenschaftlicher Strenge am größten ist.<sup>3</sup>

Immerhin verbleiben der formalen Entscheidungstheorie aber weite Bereiche, innerhalb derer wir sie fruchtbar und gewinnbringend anwenden können. (Und dort wo man sie anwenden kann, ist man mit Hilfe der Theorie anderen, intuitiven Entscheidungsfindungsmechanismen so gut wie immer überlegen!) Sofern die Menge der möglichen Ergebnisse und die Menge der Zustände bekannt ist, können wir sie selbst dann noch heranziehen, wenn wir nicht einmal wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit wir mit einem bestimmten Zustand rechnen müssen. In diesem Fall handelt es sich um „Entscheidungen unter Unwissen“. Den dazugehörigen Teil der Entscheidungstheorie werden wir in der nächsten und übernächsten Woche besprechen. Sind die Wahrscheinlichkeiten, mit denen bestimmte Ereignisse eintreten können, dagegen bekannt, dann spricht man von „Entscheidungen unter Risiko“. In diesem Fall lässt sich die Entscheidungstheorie sogar noch viel besser anwenden, was in den darauffolgenden Wochen demonstriert wird. Was schließlich die Spieltheorie, die wir als Letztes in diesem Semester ansprechen werden, von der Entscheidungstheorie unterscheidet, ist, dass sie die strategische Interaktion zwischen mehreren Entscheidern („Spielern“) untersucht, die wechselseitig aufeinander reagieren bzw. die Reaktion des Gegenübers antezipieren können. An die Stelle der (Welt-)Zustände in der Entscheidungstheorie treten in der Spieltheorie also die Züge des anderen Spielers.

---

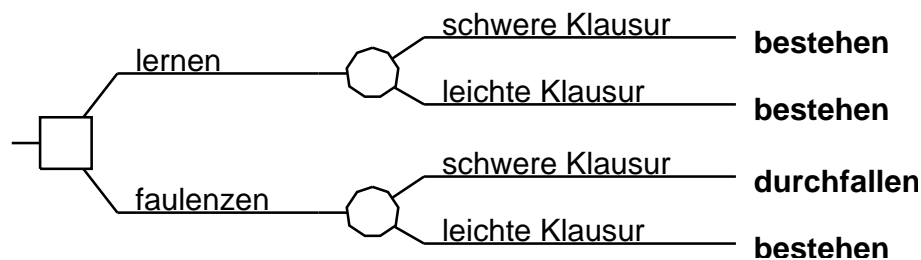
<sup>3</sup>Siehe dazu die Kritik von Ian Shapiro Shapiro (2005) oder von John Dupré Dupré (2001), sowie die ausführliche Studie von Donald Green und Ian Shapiro Green and Shapiro (1994). Besonders das letztere Buch hat eine rege Diskussion hervorgerufen. Eine Verteidigung des formalen Rational Choice Ansatzes gegen die Kritik von Green und Shapiro hat neben anderen Gary W. Cox Cox (1999) unternommen. Cox Ansicht allerdings, dass man selbst dann noch theoretische Erfolge für eine Theorie reklamieren kann, wenn sie empirisch erfolglos ist (Cox, 1999, S.159-164), geht an dem grundlegenden Ziel der Wissenschaft vorbei, das selbstverständlich in der Erklärung von Vorgängen in der empirischen Welt besteht und nichts anderem, und ist eher ein Beispiel wie Wissenschaftlicher sich lieber die Wissenschaftstheorie zurechtbiegen als ein Scheitern des von ihnen verfolgten Ansatzes einzugestehen. Eine wissenschaftliche Theorie, die falsch ist, oder deren Richtigkeit oder Falschheit man nicht empirisch feststellen kann, kann man unmöglich „erfolgreich“ nennen.

### 1.1.3 Darstellungsformen

Zum Abschluss dieser Vorlesungsstunde soll – sozusagen als „Appetizer“ – wenigstens schon ein kurzer Einblick in die Entscheidungstheorie selbst gegeben werden, mit der wir uns im Laufe des Semesters eingehend beschäftigen werden. Wir werden im folgenden Entscheidungsbäume und Entscheidungstabellen als zwei unterschiedliche Formen der Darstellung von Entscheidungsproblemen kennen lernen und zeigen, dass sich beide Darstellungsformen wechselseitig ineinander überführen lassen.

#### Entscheidungsbäume und -tabellen

Zuvor hatten wir schon ein einfaches Beispiel einer Entscheidungstabelle angeführt. Dies ist nicht die einzige Form, in der man Entscheidungsprobleme schematisch darstellen kann. Eine andere, wahrscheinlich sogar anschaulichere Form der schematischen Darstellung ist der *Entscheidungsbaum*. Die weiter oben schon einmal als Entscheidungstabelle dargestellte Entscheidungssituation sieht als Baum folgendermaßen aus:



Entscheidungs-knoten und Möglichkeits-knoten

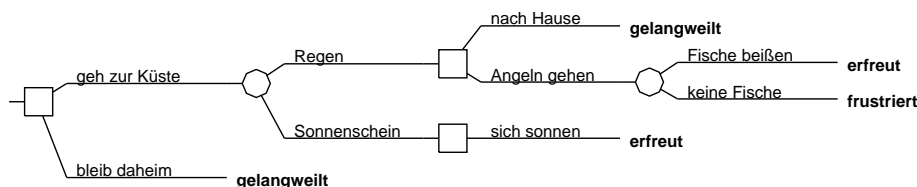
Entscheidungs-bäume bestehen immer aus Knoten und Ästen. Dabei werden diejenigen Knoten, an denen eine Entscheidung zwischen unterschiedlichen Handlungsalternativen getroffen werden muss, *Entscheidungsknoten* genannt. Entscheidungsknoten werden durch ein Quadrat symbolisiert. Diejenigen Knoten, die ein Zufallsereignis repräsentieren, werden *Möglichkeits-knoten* genannt und durch einen Kreis symbolisiert. Eingangs wurde statt von „Zufallsereignissen“ von „Zuständen“ gesprochen. Die Zweige, die auf einen Entscheidungsknoten folgen, stellen dabei unterschiedliche „Handlungsalternativen“ dar, zwischen denen die Entscheiderin wählen kann. Die Zweige, die auf einen Möglichkeitsknoten folgen, entsprechen dagegen unterschiedlichen (Welt)-„Zuständen“, von denen entweder nicht sicher ist, welcher davon eintreten wird, oder von denen wir nicht wissen welcher eintreten wird oder bereits eingetreten ist, so dass es sich aus Sicht des Entscheiders immer noch um ein zufälliges Ereignis handelt. (Die Unterscheidung zwischen epistemischer Unsicherheit und objektiver Unbestimmtheit und, damit einhergehend,

die zwischen subjektiver und objektiver Wahrscheinlichkeit muss uns an dieser Stelle noch nicht interessieren.) Die Ergebnisse stehen am Ende der Äste.

Umwandlung  
von Tabellen  
in Bäume

Hat man eine Entscheidungssituation, wie in diesem Fall, bereits durch eine Entscheidungstabelle dargestellt, dann kann man daraus sehr einfach einen Entscheidungsbaum ableiten, der dieselbe Entscheidungssituation wiedergibt: Man beginnt mit einem viereckigen Entscheidungsknoten. An diesen Entscheidungsknoten hängt man alle Handlungsalternativen an, die in der ersten Spalte der Tabelle stehen. Jeder dieser Zweige wird dann mit einem runden Möglichkeitsknoten versehen, an den wiederum alle Zustände angehängt werden, die in der ersten Zeile der Tabelle stehen. Am Ende der Zweige wird dann das jeweilige Ergebnis aus der Tabelle eingetragen.

Entscheidungsbäume haben gegenüber Entscheidungstabellen den Vorteil größerer Anschaulichkeit. Umgekehrt erlauben Tabellen eine kompaktere Darstellung. Die größere Anschaulichkeit soll an einem weiteren Beispiel demonstriert werden. Bei diesem Beispiel geht es um eine Person, die vor der Entscheidung steht, ob sie an einem Sonntag bei unsicherer Wetterprognose zur Küste fahren und sich dort entweder sonnen oder, falls es regnet, dort angeln gehen würde. Die Entscheidungssituation, die mehrere Einzelentscheidungen beinhaltet (1) zur Küste fahren oder nicht, 2) bei Regen: Angeln gehen oder gleich heimkehren) könnte folgendermaßen aussehen:



(Beispiel aus (Resnik, 2000, S. 18))

Entscheidungsbäume erlauben es komplexe Entscheidungen, die aus mehreren Einzelentscheidungen zusammengesetzt sind, in ihrem Verlauf darzustellen. Dennoch kann man jedes Entscheidungsproblem, dass sich durch einen Entscheidungsbaum beschreiben lässt auch als Entscheidungstabelle darstellen. Dazu muss man die möglichen Sequenzen von Einzelentscheidungen zu *Gesamtstrategien* zusammenfassen. Solche Gesamtstrategien müssen die „unter allen möglichen Eventualitäten“ zu treffenden Einzelentscheidungen festlegen. Gleichfalls ist es meist erforderlich, die Zufallsereignisse zu komplexeren Zuständen zusammenzufassen. Verfährt man in dieser Weise, dann entsteht aus dem eben präsentierten Entscheidungsbaum folgende Tabelle:

	Regen und Fische beißen	Regen und keine Fische	Sonnenschein
A1	gelangweilt	gelangweilt	erfreut
A2	erfreut	frustriert	erfreut
A3	gelangweilt	gelangweilt	gelangweilt

- A1: geh zur Küste; wenn Regen dann nach Hause, sonst wenn Sonnenschein dann sich sonnen
- A2: geh zur Küste; wenn Regen dann Angeln gehen, sonst wenn Sonnenschein dann sich sonnen
- A3: bleib daheim

*Quizfrage: Kann man anhand dieser Entscheidungstabelle bereits feststellen, welche Handlungsalternative gewählt werden sollte oder zumindest sagen, ob eine bestimmte Handlungsalternative definitiv nicht gewählt werden sollte?*

Nehmen Sie sich ruhig ein wenig Zeit, um sich klar zu machen, dass die Tabelle dem Entscheidungsbaum entspricht, d.h. dass alle Handlungsalternativen, die nach der Baumdarstellung gewählt werden können, auch nach der Tabellendarstellung möglich sind, und ebenso auch alle denkbaren Kombinationen von Zufallsereignissen. Man könnte sich dabei zunächst wundern, warum beispielsweise die Kombination der Ereignisse „Sonnenschein“ und „Fische beißen“ nicht in der Tabelle vorkommt. Aber da in dem Fall, dass die Sonne scheint, der zweite Möglichkeitsknoten gar nicht mehr erreicht wird, wirkt sich der Unterschied, ob die Fische beißen oder nicht, auch nicht auf das Ergebnis aus. Insofern können beide Fälle durch ein- und dieselbe Zustandsspalte „Sonnenschein“ erfasst werden

Das Verfahren, wie man einen Entscheidungsbaum in eine Tabelle überführt, ist ebenfalls rein mechanischer Art. Da es etwas komplizierter ist als die Umwandlung einer Tabelle in einen Entscheidungsbaum, werden wir es gleich (Abschnitt 1.1.3) ausführlicher betrachten. Bis dahin soll einfach als gegeben angenommen werden, dass dies immer möglich ist.

Wenn wir es aber einmal als gegeben betrachten, dass man jeden Entscheidungsbaum in eine Entscheidungstabelle überführen kann, und, wie zuvor schon gezeigt wurde, jede Entscheidungstabelle in einen Entscheidungsbaum, dann hat das die für uns wichtige Konsequenz, dass wir frei sind, uns je nach Konvenienz der einen oder der anderen Darstellung zu bedienen. Dies gilt insbesondere für die Entwicklung der Entscheidungstheorie selbst. Denn wir können nun davon ausgehen, dass alle Überlegungen, die wir in Bezug auf Entscheidungsprobleme anhand einer der Darstellungsformen anstellen, ihre

Gültigkeit behalten, wenn wir zu der anderen Darstellungsform übergehen. Für die Entwicklung der Theorie eignet sich dabei die kompaktere Tabellenform häufig besser. Umgekehrt bietet sich für die Darstellung und Lösung bestimmter Entscheidungsprobleme oft eher die anschaulichere Darstellung durch Entscheidungsbäume eher an.

Wenn die Rede davon war, dass sich Tabellendarstellung und Baumdarstellung auf mechanische Weise ineinander überführen lassen, so bedeutet das allerdings nicht, dass wenn man nach diesem Verfahren einen Entscheidungsbaum zuerst in eine Tabelle und dann wieder in einen Baum überführt, auch derselbe Entscheidungsbaum wieder dabei heraus kommt. Transformiert man die eben gewonnene Tabelle wieder in einen Baum, so hat dieser Entscheidungsbaum die folgende Gestalt:



Dass der Entscheidungsbaum nach der Übertragung in die Tabellenform und dann wieder der Rückübertragung in die Baumform ganz anders aussieht, sollte allerdings nicht verwundern, denn es gibt in der Regel viele unterschiedliche Möglichkeiten ein- und dasselbe Entscheidungsproblem als Baum- und Tabelle darzustellen. Der zuletzt gezeigte Baum stellt in der Tat dasselbe Entscheidungsproblem dar wie der ursprüngliche Baum. Identisch sind zwei Entscheidungsprobleme genau dann, wenn denselben Kombinationen von Handlungsalternativen und Zuständen dieselben Ergebnisse zugeordnet sind. Bei Entscheidungen unter Risiko müssen die möglichen Weltzustände darüber hinaus mit denselben Wahrscheinlichkeiten eintreten. Leider kann man weder der Baumdarstellung noch der Tabellendarstellung unmittelbar ansehen, ob zwei Entscheidungsprobleme identisch sind. Für die Entscheidungsbäume ist dies nach dem vorhergehenden Beispiel offensichtlich. Bei

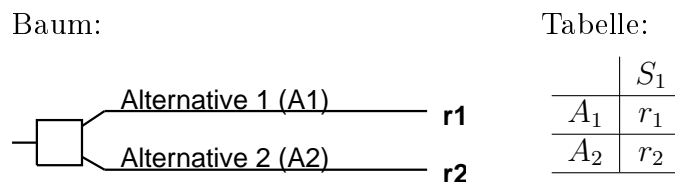
Tabellen ergibt sich dies unter anderem daraus, dass die Reihenfolge der Spalten und Zeilen für das zu Grunde liegende Entscheidungsproblem egal ist (siehe Aufgabe 5).

### Exkurs: Entscheidungsbäume in Tabellen umwandeln

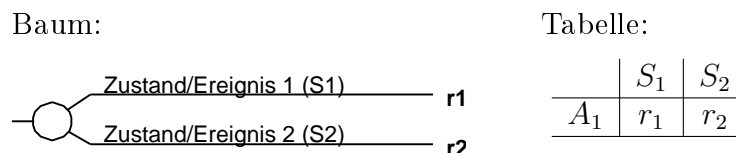
*Dieses Teilkapitel ist als Exkurs gedacht. Wem es für den Anfang zu schwierig ist, der kann diesen Exkurs (und die dazu gehörigen Übungsaufgaben) ruhig überspringen. Im Folgenden wird darauf nicht mehr zurück gegriffen.*

Um Entscheidungsbäume in Tabellen umzuwandeln, können wir uns den Umstand zu Nutze machen, dass Entscheidungsbäume, so kompliziert sie auch sein mögen, aus der Kombination von nur zwei Elementen bestehen, Entscheidungsknoten und Zufallsknoten. Um einen Entscheidungsbaum in eine Tabelle zu überführen müssen wir also nur wissen, wie man 1) Entscheidungsknoten in eine Tabelle überträgt, wie man 2) Zufallsknoten in eine Tabelle überträgt und 3) wie man einen komplizierten zusammengesetzten Baum schrittweise mit Hilfe der beiden vorherigen Übertragungsregeln reduziert.

1) Ein Entscheidungsbaum, der nur aus einem einzigen Entscheidungsknoten mit zwei Alternativen besteht, ergibt eine Tabelle mit zwei Zeilen und einer Spalte:



2) Ein Baum, der nur aus einem Zufallsknoten besteht, liefert demgegenüber eine Tabelle mit nur einer Zeile und genau soviel Spalten wie Ereignisse an dem entsprechenden Ereignisknoten eintreten können.




3) Wie kann man nun aber einen Entscheidungsbaum, der aus einer Vielzahl von Entscheidungs- und Zufallsknoten besteht, in eine Tabelle überführen? Dazu wird der Baum schrittweise von hinten „aufgerollt“. Die jeweils „letzten“ Entscheidungs- bzw. Zufallsknoten von rechts entsprechen genau den vorher beschriebenen Fällen und können auf die beschriebende Weise



umgewandelt werden. Kompliziert wird es erst bei den weiter in der Mitte und am Anfang liegenden Knoten. Wenn wir an einem solchen Knoten ankommen, haben wir den Baum aber schon soweit aufgerollt, dass wir zu den sich an den Knoten anschließenden Teilbäumen bereits über Tabellen verfügen. Das Problem stellt sich also folgendermaßen dar: Wie kann ein Entscheidungsknoten bzw. ein Zufallsknoten in eine Tabelle überführt werden, an dessen Enden sich wiederum ganze Entscheidungsbäume anschließen, für die wir aber immerhin schon über eine Repräsentation in Tabellenform verfügen?

Um dieses Problem zu lösen, müssen wir wiederum Entscheidungs- und Zufallsknoten getrennt betrachten:

3 a) Angenommen, wir haben es mit einem Entscheidungsknoten zu tun. Dann endet der Entscheidungsknoten in zwei Teilbäumen, die bereits als Tabellen dargestellt sind. Jede dieser Tabellen enthält wiederum eine Menge von Handlungsalternativen und eine Menge von Zufallsereignissen.

		Tabelle zu Baum 1				Tabelle zu Baum 2			
	<b>Baum 1</b>		$S_1$	$\cdots$	$S_n$		$T_1$	$\cdots$	$T_l$
		$A_1$	$r_{11}$	$\cdots$	$r_{1n}$	$B_1$	$u_{11}$	$\cdots$	$u_{1l}$
		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	<b>Baum 2</b>	$A_m$	$r_{m1}$	$\cdots$	$r_{mn}$	$B_h$	$u_{h1}$	$\cdots$	$u_{hl}$

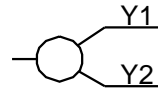
Die beiden Ereignismengen  $\{S_1, \dots, S_n\}$  und  $\{T_1, \dots, T_l\}$  des ersten und des zweiten Teilbaums sowie die entsprechenden Mengen von Handlungsalternativen  $\{A_1, \dots, A_m\}$  und  $\{B_1, \dots, B_h\}$  müssen nun in geeigneter Form kombiniert werden, um die Tabelle des gesamten Entscheidungsknotens aufzubauen. Das geschieht folgendermaßen: In den Spalten der zusammengefassten Tabelle muss jede mögliche Kombination der Zufallsereignisse aus beiden Mengen eingetragen werden. In den Zeilen wird als erstes der Block von Handlungen  $X_1 \wedge A_1, \dots, X_1 \wedge A_m$  eingetragen, worauf als zweites ein Block von Handlungen  $X_2 \wedge B_1, \dots, X_2 \wedge B_h$  folgt (d.h. jede der Handlungen der ersten Tabelle wird mit der Handlung  $X_1$  kombiniert, jede alternative Handlung der zweiten Tabelle mit  $X_2$ ).<sup>4</sup> Daraus ergibt sich folgende kombinierte Tabelle:

<sup>4</sup>Das aus der Logik bekannte Zeichen  $\wedge$  bedeutet „und“, so dass der Ausdruck  $X_1 \wedge A_1$  so zu verstehen ist, dass die Handlung  $X_1$  *und* die (möglicherweise wiederum aus mehreren Einzelhandlungen zusammengesetzte) Handlung  $A_1$  ausgeführt werden.

	$S_1 \wedge T_1$	$\cdots$	$S_n \wedge T_1$	$\cdots$	$S_1 \wedge T_l$	$\cdots$	$S_n \wedge T_l$
$X_1 \wedge A_1$	$r_{11}$	$\cdots$	$r_{1n}$	$\cdots$	$r_{11}$	$\cdots$	$r_{1n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$X_1 \wedge A_m$	$r_{m1}$	$\cdots$	$r_{mn}$	$\cdots$	$r_{m1}$	$\cdots$	$r_{mn}$
$X_2 \wedge B_1$	$u_{11}$	$\cdots$	$u_{1n}$	$\cdots$	$u_{11}$	$\cdots$	$u_{1n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$X_2 \wedge B_h$	$u_{h1}$	$\cdots$	$u_{hn}$	$\cdots$	$u_{hl}$	$\cdots$	$u_{hn}$

Man beachte: Jedes mögliche Resultat  $r_{xy}$  aus der ersten Tabelle kommt genau  $l$ -mal vor, d.h. genauso viel mal, wie es Zufallsereignisse in der zweiten Tabelle gibt. Umgekehrt kommt jedes mögliche Resultat  $u_{xy}$  aus der zweiten Tabelle genau  $n$ -mal vor, wobei  $n$  die Anzahl der Zufallsereignisse in der ersten Tabelle ist. (Die entsprechende Tabellendarstellung ist also in der Regel hochgradig redundant und könnte, wenn dies der Fall ist, nachträglich noch vereinfacht werden.)

3 b) Geht es statt dessen um die Umwandlung eines Zufallsknotens, dann stehen wir vor der spiegelbildlichen Situation, so dass wir diesmal zwei Spaltenblöcke bilden und in den Zeilen jede Kombination möglicher Handlungen zu berücksichtigen haben.

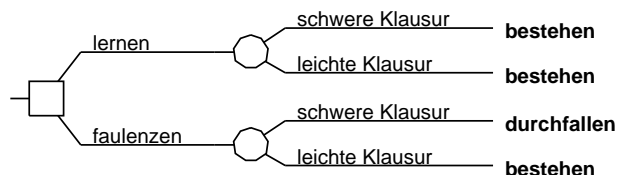
	Tabelle zu Baum 1				Tabelle zu Baum 2			
		$S_1$	$\cdots$	$S_n$		$T_1$	$\cdots$	$T_l$
	$A_1$	$r_{11}$	$\cdots$	$r_{1n}$	$B_1$	$u_{11}$	$\cdots$	$u_{1l}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	$A_m$	$r_{m1}$	$\cdots$	$r_{mn}$	$B_h$	$u_{h1}$	$\cdots$	$u_{hl}$

Um die kombinierte Tabelle zu konstruieren, müssen wir also zwei Spaltenblöcke bilden, wobei der erste Block alle Zufallsereignisse der ersten Tabelle umfasst (und-verknüpft mit dem Ereignis  $Y_1$  versteht sich!) und der zweite Block die der zweiten Tabelle: In den Zeilen treten alle Kombinationen möglicher Handlungen auf, und zwar, da die Möglichkeit, eine bestimmte Handlung zu wählen oder nicht zu wählen erst durch das Eintreten von  $Y_1$  oder  $Y_2$  überhaupt eröffnet wird, in einer „wenn... dann...“-Form. In einer abgekürzten Schreibweise, bei der das Zeichen „ $\rightarrow$ “ für die wenn-dann-Beziehung stehen soll, schreiben wir also z.B.  $(Y_1 \rightarrow A_2) \wedge (Y_2 \rightarrow B_5)$ .<sup>5</sup>

<sup>5</sup> Angesichts der Symmetrie zwischen dem Problem der Umwandlung eines Entscheidungsknotens in eine Tabelle und dem der Umwandlung eines Zufallsknotens in eine Tabelle, könnte es verwundern, dass wir im zweiten Fall in den Zeilen der generierten Tabelle

	$Y_1 \wedge S_1$	$\dots$	$Y_1 \wedge S_n$	$Y_2 \wedge T_1$	$\dots$	$Y_2 \wedge T_l$
$Y_1 \rightarrow A_1 \wedge Y_2 \rightarrow B_1$	$r_{11}$	$\dots$	$r_{1n}$	$u_{11}$	$\dots$	$u_{1l}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$Y_1 \rightarrow A_1 \wedge Y_2 \rightarrow B_h$	$r_{h1}$	$\dots$	$r_{hn}$	$u_{h1}$	$\dots$	$u_{hl}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$Y_1 \rightarrow A_m \wedge Y_2 \rightarrow B_1$	$r_{m1}$	$\dots$	$r_{mn}$	$u_{11}$	$\dots$	$u_{1l}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$Y_1 \rightarrow A_m \wedge Y_2 \rightarrow B_h$	$r_{h1}$	$\dots$	$r_{hn}$	$u_{h1}$	$\dots$	$u_{hl}$

Mit diesen beiden „Übersetzungsregeln“ kann man jeden Entscheidungsbaum systematisch schrittweise in eine Tabelle überführen. Man ahnt, dass die Tabelle ziemlich groß werden kann. Dies hängt auch damit zusammen, dass wir an dieser Stelle auf Sonderfallbetrachtungen verzichtet haben, die die Tabelle vereinfachen könnten. Z.B. ist es sehr wohl möglich, dass unterschiedliche Zufallsknoten in einem Baum in Wirklichkeit ein- und dasselbe Ereignis ausdrücken, nur dass es je nach den zuvor getroffenen Entscheidungen möglicherweise zu anderen Resultaten führt. Am Beispiel von vorhin lässt sich dies erläutern:



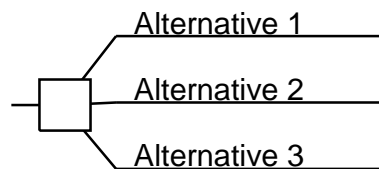
Würde man diesen Entscheidungsbaum nach unserem „mechanischen“ Verfahren in eine Tabelle überführen, dann würden in den Spaltenüberschriften die Ereignisse „schwere Klausur & schwere Klausur“, „schwere Klausur & leichte Klausur“, „leichte Klausur & schwere Klausur“ und „leichte Klausur & leichte Klausur“ stehen. Das hängt damit zusammen, dass der Algorithmus zunächst keine Informationen darüber hat, ob unterschiedliche Zufallsknoten möglicherweise identische Zufallsereignisse repräsentieren. Man müsste den Entscheidungsbaum um entsprechende Informationen ergänzen (z.B. indem man eine Verbindungslinie zwischen identischen Ereignissen zieht) und den

---

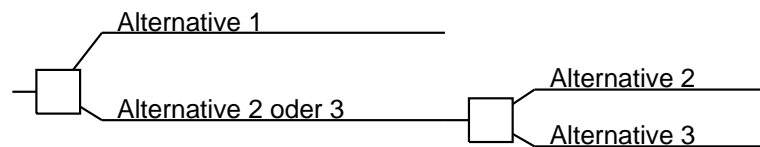
„wenn... , dann...“-Ausdrücke vorfinden, während wir uns im ersteren Fall mit simplen und-Verknüpfungen begnügen. Dies ist dadurch motiviert, dass wir davon ausgehen, dass die Ereignisse der Serien  $T_1, \dots, T_n$  bzw.  $S_1, \dots, S_n$  unabhängig von den getroffenen Entscheidungen auch dann eintreten, wenn sie angesichts des gewählten Zweiges für das erzielbare Ergebnis nicht mehr relevant sind. Diese Annahme ist zwar harmlos aber keinesfalls zwingend. Wollte man ganz präzise sein, dann müsste man die Spaltenüberschriften der aus einem Entscheidungsknoten gewonnenen Tabelle ebenfalls als „wenn... , dann...“-Aussagen ausformulieren.

Algorithmus so anpassen, dass er unmögliche Ereigniskombinationen („schwere & leichte Klausur“) streicht.

Weiterhin haben wir den Algorithmus zur Übersetzung von Bäumen in Tabellen zunächst nur für *Binär*-bäume (d.h. Bäume, die an jeder Verzweigung nur zwei Äste haben) beschrieben. Das ist aber unproblematisch, da man jeden Entscheidungsbaum in einen binären Entscheidungsbaum umwandeln kann. Z.B. kann der Entscheidungsbaum



einfach in den Baum



umgewandelt werden. Eine andere Alternative bestünde darin, den Algorithmus so anzupassen, dass er sich auch für nicht binäre Entscheidungsbäume eignet (siehe Übungsaufgabe 6 auf Seite 22).

### 1.1.4 Literaturhinweise

Zum Schluss ein par Worte zu der Fachliteratur, auf die sich diese Vorlesung stützt, und die ich als Ergänzung zu diesem Skript als Begeleittexte empfehle: Zum überwiegenden Teil werde ich in dieser Vorlesung dem Buch „Choices. An Introduction to Decision Theory“ von Micheal D. Resnik (2000) folgen. Es handelt sich dabei um eine didaktisch gut aufbereitete und sehr verständliche Einführung in die Entscheidungstheorie und die Grundlagen der Spieltheorie. Für die etwas mathematischeren Teile dieser Vorlesung, insbesondere für den „Satz von Arrow“ und die „Neumann-Morgensternschen Nutzenfunktionen“, möchte ich auch auf die sehr klare und verständliche Darstellung in dem Lehrbuch von Mas-Colell, Whinston, and Green (1995) verweisen. Speziell was die philosophischen Probleme im Zusammenhang mit der Entscheidungstheorie angeht, werde ich weiterhin Das Buch von Mark Kaplan „Decision Theory as Philosophy“ (Kaplan, 1996) hinzuziehen. Für die Themen aus dem Bereich Social Choice und Public Choicde, greife ich unter anderem auf Dennis C. Mueller: „Public Choice III“ (Mueller, 2003) zurück. (Als kritische Ergänzung zu der sehr einseitigen Darstellung Muellers ist, wie bereits erwähnt, das

Buch „The Pathologies of Rational Choice“ von Green and Shapiro (1994) sehr empfehlenswert.) Soweit in der Vorlesung auch wissenschaftstheoretische Fragen berührt werden, beziehe ich mich hauptsächlich auf Gerhard Schurz’ „Einführung in die Wissenschaftstheorie“ (Schurz, 2006).

### 1.1.5 Aufgaben

1. *Stelle folgendes Entscheidungsproblem als Entscheidungsbaum dar:* Paula und Fritz stoßen an einer vielbefahrenen Kreuzung mit ihren Autos zusammen. Vieles spricht dafür, dass Fritz schuld ist. Deshalb bietet Fritz' Versicherung Paula € 5.000 als Schadensersatz und Schmerzensgeld an. Paula glaubt jedoch, dass ihr mehr zusteht und überlegt vor Gericht zu ziehen. Wenn Sie klagt, dann könnte es sein, dass Fritz' Versicherung ihr Angebot im Falle einer außergerichtlichen Einigung auf € 10.000 erhöht. Es ist aber auch möglich, dass die Versicherung ihr ursprüngliches Angebot beibehält. Gewinnt Paula den Prozess, dann erhält sie € 20.000. Verliert Sie den Prozess, dann bekommt sie gar nichts. (Gerichts- und Anwaltskosten können zunächst vernachlässigt werden.)
2. *Aufgabe:* Angenommen, bei einer Klage, die später zurückgezogen wird, fallen für die Klägerin immer noch Anwalts- und Gerichtskosten von € 500 an. Angenommen weiterhin, der Prozess kostet den Verlierer oder die Verliererin € 2.500. *Wie sieht nun der Entscheidungsbaum aus?*
3. Stelle das Entscheidungsproblem aus der vorhergehenden Aufgabe als Tabelle dar.
4. *Aufgabe:* Angenommen, Paula würde eine Klage gar nicht erst in Erwägung ziehen, wenn die Versicherung von Fritz ihr gleich € 10.000 anbietet und sie würde ihre Klage wieder fallen lassen, wenn sich die Versicherung außergerichtlich auf € 15.000 mit ihr einigt. Für die Prozesskosten der Versicherung soll dasselbe gelten wie in Aufgabe 2. *Wie sieht der Entscheidungsbaum aus Sicht der Versicherung aus?*
5. *Erkläre:* Wenn man bei einer Entscheidungstabelle beliebig oft ganz Spalten oder ganze Zeilen vertauscht, stellt sie immer noch ein- und dasselbe Entscheidungsproblem dar. Warum?

#### Schwerere Aufgaben:

6. Formuliere den Algorithmus zur Umwandlung von Entscheidungsbäumen in Entscheidungstabellen (siehe Abschnitt 1.1.3) so um, dass er auch für nicht binäre Entscheidungsbäume geeignet ist.
7. Beweise (bzw. Erläutere), dass die Kombinationen von Zufallsereignissen in den durch den Algorithmus zur Umwandlung von Entscheidungs-

bäumen (siehe Abschnitt 1.1.3) generierten Tabellen immer noch wechselseitig ausschließend und zugleich erschöpfend (d.h. eins der Ereignisse tritt auf jeden Fall ein) sind.

## 1.2 Entscheidungen unter Unwissenheit I

In dieser und der folgenden Woche werden wir uns mit Entscheidungen unter Unwissen beschäftigen. Entscheidungen unter Unwissen sind Entscheidungen, bei denen wir nicht wissen mit welcher Wahrscheinlichkeit bestimmte Ereignisse (bzw. „Welt-Zustände“) eintreten können, bei denen wir aber immer noch eine klare Vorstellung davon haben, mit welchen Ereignissen als Bedingungen unserer Entscheidungen und mit welchen Ergebnissen als Resultaten der Entscheidungen überhaupt zu rechnen ist. Entscheidungen unter Unwissen sind zu unterscheiden von Entscheidungen unter „vollständiger Unwissenheit“ einerseits, bei denen wir nicht einmal mehr mit Sicherheit angeben können, zu welchen möglichen Resultaten unsere Handlungen führen können, und von „Entscheidungen unter Risiko“ andererseits, bei denen wir zusätzlich Aussagen über Wahrscheinlichkeit der in Betracht zu ziehenden Ereignisse machen können.

Naturgemäß bieten Entscheidungen unter Risiko, bei denen wir Wahrscheinlichkeiten angeben können, die besten Angriffspunkte für eine formale Theorie des Entscheidens. Aber auch Entscheidungen unter Unwissenheit sind bis zu einem gewissen Grade einer formalen Behandlung zugänglich, und weil dabei die Wahrscheinlichkeitstheorie nicht erforderlich ist, handelt es sich technisch gesehen sogar um den einfacheren Teil der Entscheidungstheorie, weshalb wir diesen Teil auch zuerst besprechen.

### 1.2.1 Die einfachste Entscheidungsregel: Das Prinzip der Dominanz

Bisher haben wir nur über die Darstellung von Entscheidungsproblemen in Form von Entscheidungsbäumen und -tabellen gesprochen. Wie kann man aber nun (mit Hilfe von Bäumen oder Tabellen) Entscheidungsprobleme lösen? Ein besonders offensichtliches Prinzip, das bei der Lösung von Entscheidungsproblemen eine Rolle spielt, ist das *Prinzip der Dominanz*. Betrachten wir dazu noch einmal die eingangs vorgestellte Entscheidungstabelle:

		Zustand	
		schwere Klausur	leichte Klausur
Handlung	lernen	<i>bestehen</i>	<i>bestehen</i>
	faulzen	<i>durchfallen</i>	<i>bestehen</i>

Man sieht anhand der Tabelle sofort, dass es auf jeden Fall besser wäre zu lernen als zu faulzen, denn in dem Fall, dass die Klausur schwer ist, erzielt man durch Lernen ein besseres Ergebnis und in dem Fall, dass sie leicht wird,



ist das Ergebnis wenigstens nicht schlechter als wenn man nicht lernt. Das bei dieser Überlegung implizit zu Grunde gelegte Entscheidungsprinzip kann man folgendermaßen formulieren.

*Prinzip der schwachen Dominanz:* Wenn eine Handlung unter allen Umständen zu einem mindestens gleichguten Ergebnis führt wie alle anderen Alternativen und in mindestens einem möglichen Fall zu einem besseren Ergebnis, dann wähle diese Handlung.

schwache  
Dominanz

Analog zu dem Prinzip der schwachen Dominanz kann man auch ein Prinzip der starken Dominanz aufstellen, bei dem gefordert wird, dass die zu wählende Handlung unter allen Umständen zu einem eindeutig besseren Ergebnis führt als sämtliche verfügbaren Alternativen. An dieser Stelle ist die Unterscheidung zwischen schwacher Dominanz und starker Dominanz noch nicht besonders wichtig. Der Begriff der starken Dominanz könnte sogar verzichtbar erscheinen. Allerdings spielt diese Unterscheidung spätestens bei der Suche nach geeigneten Lösungsstrategien in der Spieltheorie wieder eine wichtige Rolle und wird uns dort noch beschäftigen.

starke  
Dominanz

Das Prinzip der schwachen Dominanz erscheint so einfach und eindeutig, dass man nicht vermuten sollte, dass es bei seiner Anwendung irgendwelche Schwierigkeiten auftreten könnten. Dass das nicht unbedingt stimmen muss, kann das folgende Beispiel verdeutlichen: Angenommen, Sie betreten ein Wettbüro, in dem Sportwetten für die Sportarten Fussball und Tennis angeboten werden. Der Einsatz beträgt in jedem Fall 2 Euro, aber da sehr viel weniger Leute an Tennis interessiert sind als an Fussball, können Sie bei einer Tenniswette höchstens € 10.000 gewinnen, während bei einer Fußballwette satte € 50.000 drin sind. Ihre Entscheidungstabelle würde als folgendermaßen aussehen:

Mögliche  
Fehlschlüsse

	Wette gewinnt	Wette verliert
Tennisswette	€ 9.998	€ -2
Fussballwette	€ 49.998	€ -2

Wollte man in dieser Situation auf das Prinzip der Dominanz zurückgreifen, dann müsste man sich eigentlich ganz klar für die Fussballwette entscheiden. Warum könnte das aber ein Trugschluss sein? Der Grund ist folgender: Es ist höchst wahrscheinlich, dass die Gewinnchancen bei beiden Wetten sehr unterschiedlich verteilt sind. Werden einem zwei solche Wetten angeboten, dann ist davon auszugehen, dass die Gewinnchancen bei der Fussballwette sehr viel geringer sind als bei der Tennisswette. Je nachdem, um wieviel sie geringer sind, könnte es sein, dass die Tennisswette sogar aussichtsreicher ist als die Fussballwette. (Was „aussichtsreicher“ dabei exakt heisst, werden wir noch

Handlungsab-  
hängige  
Wahrschein-  
lichkeiten

genau definieren, wenn wir Entscheidungen unter Risiko besprechen.) Wenn man so will, besteht der „Denkfehler“ bei diesem Beispiel also darin, dass die Problemspezifikation unvollkommen war, indem wichtige Hintergrundinformationen über die Natur dieses speziellen Entscheidungsproblem, nämlich die Handlungsabhängigkeit der Eintrittswahrscheinlichkeiten der Ereignisse, bei der Formalisierung in Tabellenform „vergessen“ wurden.

Daneben gibt es aber noch ein weiteres denkbare Problem, wie das folgende, mit leichten Abwandlungen aus Resniks Buch (Resnik, 2000, S.9 ) übernommene Beispiel verdeutlicht. Das Beispiel gibt stark vereinfacht die strategische Problematik der Aufrüstung im kalten Krieg wieder:

	Krieg	Frieden
Aufrüsten	„Tot“	hohe Militärausgaben
Abrüsten	„Rot“	„Friedensdividende“

Strategische  
Interaktion

Nimmt man einmal an, dass es besser ist, sich zum Kommunismus bekehren zu lassen als zu sterben, dann müsste man nach dem Prinzip der Dominanz eigentlich Handlungsalternative „Abrüsten“ eindeutig vorziehen, denn unabhängig davon, ob es Krieg oder Frieden gibt, erzielt man mit der Entscheidung zugunsten der Abrüstung in beiden Fällen das jeweils bessere Ergebnis. Wo ist der Haken an dieser Argumentation? Der „Haken“ besteht darin, dass das Eintreten der Zustände „Krieg“ oder „Frieden“ nicht unabhängig davon ist, welche Handlung gewählt wird. Zumindest nach Ansicht von Aufrüstungsbefürwortern hätte damals eine zu weit gehende Abrüstung die Gefahr eines Überfalls durch die Ostblockstaaten drastisch erhöht. Stimmt man dem zu, dann ist es keineswegs mehr so eindeutig, dass Abrüsten die bessere Wahl ist.

Dieses Beispiel zeigt, dass es noch eine weitere stillschweigende Voraussetzungen für die Anwendung des Prinzips der Dominanz (wie sowie übrigens auch anderer Entscheidungsregeln) gibt, nämlich die Unabhängigkeit der „Zufallereignisse“ bzw. der Weltzustände von den getroffenen Entscheidungen. In dem angeführten Beispiel ist eine solche Unabhängigkeit nicht gegeben, da wir es mit einem Gegenspieler zu tun haben, der auf unsere Entscheidungen reagiert. Strenggenommen haben wir es daher gar nicht mehr mit einem reinen Entscheidungsproblem zu tun, sondern mit einem Problem strategischer Interaktion, das bereits in das Gebiet der Spieltheorie fällt.

### 1.2.2 Präferenzen

In der letzten Vorlesungsstunde wurde als Beispiel für ein mögliches Entscheidungsproblem, bei dem uns die Entscheidungstheorie *nicht* weiterhelfen

kann, die Frage angeführt, ob der nächste Urlaub lieber in den Bergen oder an der See gebucht werden sollte. Der Grund, weshalb uns die Entscheidungstheorie hier nicht weiterhelfen kann, besteht darin, dass es bei diesem Entscheidungsproblem noch darum geht, wie die verschiedenen Ergebnisse der Entscheidung zu bewerten sind. Grundsätzlich setzt die Entscheidungstheorie voraus, dass wir uns über die Bewertung der möglichen Ergebnisse, sprich über unsere *Präferenzen* schon im Klaren sind. Im Folgenden ist daher zunächst einiges über Präferenzen zu sagen, insbesondere welche Anforderungen an die Präferenzen gestellt werden müssen, damit sie im Sinne der Entscheidungstheorie wohlgeformt sind.

Unter *Präferenz* ist im Zusammenhang der Entscheidungstheorie eine Relation zu verstehen, die festlegt, wann ein mögliches Resultat<sup>6</sup> eines Entscheidungsprozesses einem anderen vorgezogen wird. (Da wir es mit Entscheidungsproblemen zu tun haben, bezieht sich unsere Präferenzrelation auf die möglichen Resultate von Entscheidungsprozessen. In der Ökonomie würde man die Präferenzrelation dagegen eher auf der Menge möglicher „Güterbündel“ oder dergleichen definieren. Der Einfachheit halber wird daher im Folgenden auch oft von „Gütern“ anstelle von „Resultaten“ oder „Ergebnissen“ die Rede sein.) Wenn  $x$  und  $y$  zwei mögliche Resultate eines Entscheidungsprozesses sind, dann schreiben wir  $x \succ y$ , um auszudrücken, dass  $x$  gegenüber  $y$  vorgezogen wird. Und wir schreiben  $x \sim y$ , wenn  $x$  und  $y$  gleich gut bewertet werden bzw. wenn diejenige Person, die die Entscheidung trifft, zwischen  $x$  und  $y$  *indifferent* ist. Eine wohlgeformte Präferenzrelation muss folgende fundamentale Eigenschaften erfüllen:

Eigenschaften  
der Präferenz-  
relation

1. *Antisymmetrie*: Wenn  $x \succ y$ , dann nicht  $y \succ x$  und auch nicht  $x \sim y$
2. *Zusammenhang*: Für jedes Paar  $x, y$  aus der Menge der möglichen Resultate gilt entweder  $x \succ y$  oder  $y \succ x$  oder  $x \sim y$
3. *Transitivität*: Wenn  $x \succ y$  und  $y \succ z$ , dann auch  $x \succ z$ . (In analoger Weise gilt:  $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ , sowie weiterhin:  $x \sim y \wedge y \succ z \Rightarrow x \succ z$  und:  $x \succ y \wedge y \sim z \Rightarrow x \succ z$ )

Recht-  
fertigungs-  
problem des  
Präferenz-  
konzepts

---

<sup>6</sup>Die *Resultate* eines Entscheidungsprozesses sind nicht zu verwechseln mit der Entscheidung selbst. Das Resultat ist vielmehr das, was bei einer Entscheidung heraus kommt, die Entscheidung selbst ist die Wahl, die man trifft, um dann ggf. ein bestimmtes Resultat zu erzielen. Die Präferenzen, von denen hier die Rede ist beziehen sich zunächst auf die Resultate, auch wenn man im übertragenen Sinne ebenfalls davon sprechen könnten, dass eine Entscheidung einer anderen *vorgezogen* wird, weil man sich von ihr ein besseres Resultat erhofft.

Mit welchem Recht können wir fordern, dass eine Präferenzrelation diese Eigenschaften erfüllen muss? Man kann diese Frage von zwei Seiten aus betrachten: 1) von der Seite des entscheidungstheoretischen Formalismus aus und 2) von der empirischen und normativen Seite aus. Von der Seite des entscheidungstheoretischen Formalismus stellt sich die Situation so dar, dass z.B. bestimmte Lösungsverfahren nur dann tatsächlich richtige (d.h. die Präferenzen optimal erfüllende) Entscheidungen liefern, wenn die Präferenzrelation in dem oben beschriebenen Sinne wohlgeformt ist; und zwar schon deshalb, weil die entsprechenden Lösungsverfahren unter genau dieser Voraussetzung entwickelt worden sind. Andererseits gilt aber auch, dass die Entscheidungstheorie beansprucht unser Handeln beschreiben (empirische Anwendung der Entscheidungstheorie) und richtig anleiten (normative Anwendung der Entscheidungstheorie) zu können. Dann sollten diese Eigenschaften auch den Eigenschaften von Präferenzen von Menschen in empirischen Entscheidungssituationen mehr oder weniger entsprechen.<sup>7</sup> Kann man das ungeprüft voraussetzen? Wenigstens bei den Eigenschaften der *Transitivität* und des *Zusammenhangs* sind in dieser Hinsicht erhebliche Abstriche zu machen.

Geldpumpenargument Zur *Transitivität*: Wie könnte man zunächst einmal die Eigenschaft der Transitivität rechtfertigen? Ein beliebtes Argument zur Rechtfertigung dieser Eigenschaft ist das sogenannte *Geldpumpenargument*. Angenommen, es gibt jemanden, dessen Präferenzen nicht transitiv sind. Dann gibt es drei Weltzustände (bzw. „Resultate“ oder „Güterbündel“)  $a, b, c$ , für die für diese Person gilt:  $a \prec b \prec c \prec a$ . Wenn diese Person aber  $b$  gegen  $a$  vorzieht, so bedeutet das (wie die Ökonomen glauben), dass sie gegebenenfalls bereit wäre, für den Übergang von  $a$  zu  $b$  einen bestimmten Geldbetrag zu zahlen. Dann wäre sie aber wiederum bereit einen Geldbetrag für den Übergang von  $b$  zu  $c$  bezahlen. Ist sie aber erst einmal bei  $c$  angekommen, dann würde sie wegen  $c \prec a$  nochmals bereit sein für den Übergang zu  $a$  in die Tasche zu greifen, und das ganze Spiel fängt von vorne an und könnte beliebig oft

---

<sup>7</sup>Insgesamt haben wir es hier mit drei Perspektiven auf die Entscheidungstheorie zu tun: 1. der logischen; 2. der empirischen; 3. der normativen. Häufig wird nur zwischen den letzteren beiden unterschieden. Dabei wird dann in der Regel eingeräumt, dass die Entscheidungstheorie zwar das empirisch beobachtbare Verhalten von Menschen nicht richtig beschreibt. Aber meistens wird dennoch darauf bestanden, dass sie in normativer Hinsicht dennoch zu richtigen Entscheidungen anleitet. Das stimmt insofern, als die normative Anwendung vergleichsweise schwächere erkenntnistheoretische Rechtfertigungsprobleme aufwirft als die empirische, aber auch die normative Anwendung beruht immer noch auf bestimmten empirischen Voraussetzungen, wie z.B. der, dass wohlgeformte Präferenzrelationen die empirischen Phänomene der Präferenz (d.i. des Vorziehens, des Beabsichtigens, des Wertschätzens etc.) halbwegs richtig erfassen. Vgl. dazu die klassische Darstellung von Savage (Savage, 1972, S. 7ff.), der hinsichtlich solcher subtiler Unterscheidungen im Übrigen sehr umsichtig und genau verfährt.

wiederholt werden. Die Überlegung zeigt, dass intransitive Präferenzen in gewisser Weise unplausibel bzw. inkonsequent sind.

Beispiel für  
sinnvolle  
intransitive  
Präferenzen

Allerdings gibt es ebenso Beispiele dafür, dass Präferenzen auf ganz natürliche Weise transitiv sein können, z.B. das folgende (DeLong, 1991, S. 20): Frau Schmidt möchte einen Schachcomputer kaufen. Es gibt drei Modelle, A, B und C. Einem Testbericht kann sie entnehmen, dass Modell A in einem Probespiel Modell B geschlagen hat. Modell B hat wiederum Modell C geschlagen, aber Modell C hat Modell A geschlagen. (Man kann sich überlegen, dass diese Situation sehr wohl möglich ist, denn es ist denkbar, dass der Algorithmus von Modell A mit dem von Modell B sehr gut „klarkommt“, aber nicht mit dem von Modell C, auch wenn Modell C schlechter als Modell B ist.) Die einzig sinnvollen Präferenzen, die Frau Schmidt in Bezug auf die Schachcomputer haben kann, sind in diesem Fall intransitiv, nämlich  $A \succ B \succ C \succ A$ . Man kann leicht andere Beispiele dieser Art konstruieren. Der Grund für die, in diesem Fall, sinnvolle Intransitivität von Präferenzen liegt darin, dass sich unsere Präferenzen häufig an objektive Beziehungen wie „stärker als“, „besser als“, „Sieger über“ etc. knüpfen, die ihrerseits oftmals nicht transitiv sind. (So ist ja auch z.B. von der Fussballmannschaft an der Spitze der Liga keineswegs gesagt, dass sie alle anderen Mannschaften besiegt oder mindestens unentschieden gespielt hat.)

Wenn es aber sinnvolle transitive Präferenzen gibt, was wird dann aus dem Geldpumpenargument, könnte man nun fragen. Die Antwort darauf ist, dass man dann, wenn intransitive Präferenzen auftreten, verschiedene Mechanismen anwenden kann, um mit den möglicherweise daraus resultierenden Problemen fertig zu werden. In dem Beispiel von eben könnte Frau Schmidt sich einfach beliebig für irgendeinen der Schachcomputer entscheiden oder ein Los werfen. (Dass es einem raffinierten Verkäufer tatsächlich gelingen könnte, eine Geldpumpe aus ihr zu machen, ist wohl eher unrealistisch...<sup>8</sup>)

Inkonsistenz  
bei kollektiven  
Präferenzen

Ganz besonders stellt sich das Problem intransitiver oder, ganz allgemein gesprochen, inkonsistenter Präferenzen im Zusammenhang von Kollektivpräferenzen (d.h. den gemeinsamen Präferenzen eines Kollektivs von Menschen). Wie wir gesehen haben, sind schon die Präferenzen einzelner Menschen nicht immer transitiv geordnet (und zwar nicht bloß auf Grund von Inkonsequenz oder menschlicher Unvollkommenheit, sondern weil es manchmal durchaus Sinn hat, wenn Präferenzen nicht transitiv sind!). Diese Situation tritt noch viel leichter auf, wenn wir vor dem Problem stehen, aus den Einzelpräferenzen einer Vielzahl von Individuen eine sinnvolle kollektive Präferenz abzuleiten.

<sup>8</sup>Rabin und Thaler formulieren es sehr treffend: „It does not seem to us obvious that if you can take some of a fool’s money from him some of the time then you can take all of his money all of the time“. (Rabin and Thaler, 2001, S. 227) Den Hinweis auf den Artikel von Rabin und Thaler verdanke ich Matthias Brinkmann.

Denn dazu müsste irgendein geeigneter Abstimmungsmechanismus vorhanden sein, der es erlaubt aus den vielfältigen und möglicherweise höchst disparaten Interessen der Einzelnen eine gemeinsame Zielvorstellung zu bilden. Es gehört nun aber zu den interessantesten Theoremen der Social-Choice Theory, die unter Stichworten wie „Paradox des Liberalismus“ und „Satz von Arrow“ bekannt geworden sind, dass einen solchen Abstimmungsmechanismus zu finden nicht immer leicht und manchmal sogar unmöglich ist, sofern bestimmte Anforderungen an die Fairness und die Vernunft eines solchen Abstimmungsmechanismus gestellt werden. (Inwiefern diese Anforderungen notwendig sind oder variiert werden können, so dass die „Probleme“ nicht mehr auftreten, ist dann Gegenstand der Diskussion.) Wir werden auf diese Theoreme im Laufe dieses Semesters noch ausführlich eingehen (Kapitel 2.1.2 und 2.1.3 dieses Skripts).

Grenzen der  
Transitivität  
bei marginalen  
Präferenzun-  
terschieden

Eine weitere Einschränkung der Gültigkeit der Annahme transitiver Präferenzen ergibt sich aus folgender Überlegung (Resnik, 2000, p. 23/24): Man stelle sich zwei Tassen Kaffee vor, eine ohne Zucker und eine, die eine sehr kleine Menge Zucker enthält, gerade so viel, dass man den Zucker beim Trinken noch nicht bemerkt. Jemand, der entscheiden sollte, welche Tasse Kaffee er vorzieht, würde also indifferent zwischen diesen beiden Kaffeetassen sein, auch wenn er vielleicht gezuckerten Kaffee bevorzugt. Nun denken wir uns eine dritte Kaffeetasse, die wiederum ein klein wenig mehr Zucker enthält als die zweite, aber nicht so viel mehr, als dass man den Unterschied bemerken könnte. Dann, eine vierte Kaffeetasse, die sich wiederum von der dritten durch einen nur marginal größeren Zuckergehalt unterscheidet usw. Irgendwann haben wir dann eine Kaffeetasse, die soviel Zucker enthält, dass sich der Geschmack von dem der allerersten Kaffeetasse deutlich unterscheidet. Dann würde jemand, der gezuckerten Kaffee bevorzugt, diese letzte Tasse unseres Gedankenexperiments der ersten Tasse sicherlich vorziehen, was aber im Widerspruch zur Transitivität der Indifferenzbeziehung steht. Das Gedankenexperiment ist zudem so konstruiert, dass es sich in diesem Fall nicht um ein Beispiel von Inkonsistenz oder Irrationalität handelt, sondern dass sich die Transitivität der Präferenzrelation „beim besten Willen“ nicht aufrecht erhalten lässt. Wenn wir das Gedankenexperiment als glaubhaft ansehen, dann bleibt uns nichts weiter übrig als zuzugestehen, dass wir in der Wirklichkeit nicht immer von transitiven Präferenzen ausgehen können, und dass die Präferenzrelation, so wie sie hier definiert ist, lediglich eine bessere oder manchmal auch schlechtere Annäherung an die Wirklichkeit darstellt. Man kann bereits an dieser Stelle antizipieren, dass unsere Modelle und Theorien spätestens dann in Schwierigkeiten geraten, wenn sie irgendwann einmal, und möglicherweise völlig unbemerkt (!), innerhalb einer komplizierten mathematischen Beweisführung allzu starke Anforderungen an die Gültigkeit

von Indifferenzbeziehungen stellen.<sup>9</sup>

Der tiefere Grund für das eben beschriebene Problem besteht darin, dass Relationen vom Typ „ungefähr gleich wie“ im Gegensatz zu Relationen vom Typ „gleich wie“ nicht (vollkommen) transitiv sind. Da wir es in der Empirie aber schon auf Grund von Messungenauigkeiten fast immer mit dem ersteren Typ zu tun haben, kann das zu Problemen führen, wenn man vollständige (d.h. über eine beliebig große Anzahl von Zwischengliedern erhalten bleibende) Transitivität voraussetzt.

Grenzen des  
Zusammen-  
hangs von  
Präferenzen

Neben der Transitivität, lässt sich aber auch in Zweifel ziehen, ob man stets davon ausgehen kann, dass unsere Präferenzen *zusammenhängend* sind. Zumindest wenn wir eine größere und nicht mehr ohne Weiteres überschaubare Menge von Gütern (oder möglichen Entscheidungsergebnissen) betrachten, kann man sich leicht vorstellen, dass es nicht mehr so ohne Weiteres möglich ist, von jedem Paar aus dieser Menge eindeutig zu sagen, welche der Relationen  $\succ$ ,  $\prec$  oder  $\sim$  zwischen den beiden Gliedern des Paares besteht. Einige Autoren wie z.B. Kaplan (1996), die die Voraussetzung durchgehend zusammenhängender Präferenzen für allzu artifiziell halten, führen deshalb neben der Beziehung der *Indifferenz*, die besteht, wenn wir zwei Güter gleich hoch schätzen, eine davon deutlich zu unterscheidende Beziehung der *Unentschiedenheit* oder auch „Unentschlossenheit“ ein, die dann besteht, wenn wir nicht sicher sind, ob wir eine Sache einer anderen vorziehen oder nicht, was ja etwas anderes ist, als wenn wir eine Sache als genauso gut bewerten wie eine andere. Dieser Unterschied ist recht subtil, denn man kann sowohl hinsichtlich der Indifferenz als auch hinsichtlich der Unentschiedenheit mit Recht sagen, dass wir *weder* den einen *noch* den anderen der beiden Gegenstände, zwischen denen wir indifferent bzw. unentschieden sind, dem anderen vorziehen. Trotzdem ist es noch etwas anderes, wenn wir es deshalb nicht tun, weil sie uns beide gleich lieb sind, oder deshalb, weil wir unentschieden zwischen beiden sind.

Unterschied  
von Indifferenz  
und Unent-  
schiedenheit

Die Annahme, dass es so etwas wie Unentschiedenheit gibt, erscheint besonders bei unüberschaubar großen Gegenstandsmengen oder bei solchen Gegenstandsmengen, die Güter von sehr unterschiedlicher Art enthalten, sehr viel realistischer, denn anderenfalls würde man voraussetzen, dass die Frage, welches von zwei Gütern man vorzieht, oder ob man sie beide als gleichwertig beurteilt, immer schon entschieden ist, selbst wenn wir sie uns im konkreten Fall noch gar nicht vorgelegt haben. Aber es ist immerhin möglich, eine Entscheidungstheorie auch auf der Grundlage zu konstruieren, dass es neben Bevorzugung und Indifferenz auch so etwas wie Unentschiedenheit gibt. In diesem

<sup>9</sup>An diesem Problem leidet ganz wesentlich die mathematische Rückführung kardinaler auf ordinale Präferenzen, die in Kapitel 4.1 und 4.2 vorgestellt und diskutiert wird.

Präferenz-  
basierter und  
wahlbasierter  
Ansatz

Fall muss man die Forderung, dass die Präferenzen „zusammenhängend“ sind, zu der Eigenschaft des *beschränkten Zusammenhangs* abschwächen (Kaplan, 1996, S. 13, 24). Noch weiter geht der Ansatz, die Entscheidungstheorie nicht „präferenzbasiert“, sondern „wahlbasiert“ aufzubauen (Mas-Colell, Whinston, and Green, 1995, SEITE??). Dabei wird statt einer Präferenzrelation über einer Menge von Alternativen (*präferenzbasierter Ansatz*) eine Wahlfunktion definiert, die aus Teilmengen einer Menge von Alternative die bevorzugte Alternative innerhalb dieser Teilmenge auswählt (*wahlbasierter Ansatz*). Die Formulierung der Entscheidungstheorie gestaltet sich dadurch technisch etwas komplizierter. Wir werden im Folgenden daher nur den präferenzzentrierten Ansatz zu Grunde legen und der Einfachheit halber davon ausgehen, dass es keine Unentschiedenheit gibt bzw. dass alle denkbaren Unentschiedenheiten im Vorfeld der Entscheidungsfindung geklärt worden sind. Rechtfertigen lässt sich das auf jeden Fall solange, wie wir uns auf Anwendungsfälle nur mit sehr begrenzten und überschaubaren Zielmengen beschränken. Zudem setzen wir eine gültige Präferenzrelation nur jeweils *lokal* für das in Frage stehende Entscheidungsproblem voraus. Wir unterstellen nicht, dass irgendjemand „global“ (d.h. bezüglich aller Ziele und Wünsche, die man im Leben haben kann) über wohlgeordnete (d.h. transitive und durchgängig zusammenhängende) Präferenzen verfügt.

### 1.2.3 Ordinale Nutzenfunktionen

Indifferenz-  
klassen

Mit Hilfe einer Präferenzrelation kann man die Gütermenge, auf die sich die Relation bezieht, in eine Menge von Indifferenzklassen *partitionieren*, indem man jeder Indifferenzklasse alle diejenigen Güter zuordnet, zwischen denen Indifferenz herrscht. Ist die Präferenzrelation wohlgeformt, dann schöpfen die Indifferenzklassen die gesamte Gütermenge aus, und jedes Gut ist Element genau einer Indifferenzklasse.<sup>10</sup> Weiterhin induziert die Ordnung der Güter durch die Präferenzrelation eine Ordnung auf der Menge der Indifferenzklassen. Wir können schreiben,  $I_x \succ I_y$  genau dann wenn  $x \succ y$  für  $x \in I_x, y \in I_y$ , wobei mit  $I_x$  bzw.  $I_y$  jeweils die Indifferenzklasse gemeint sein soll, der  $x$  bzw.  $y$  angehört.<sup>11</sup> Aus der Konstruktion der Indifferenzklassen ergibt sich dabei, dass wenn  $x \succ y$  für ein irgend ein beliebiges  $x \in I_x$  und ein beliebiges  $y \in I_y$  dann gilt  $x' \succ y'$  für jedes  $x' \in I_x$  und jedes  $y' \in I_y$ . Wir

<sup>10</sup> Ökonomen sprechen statt „Indifferenzklassen“ auch gerne von „Indifferenzkurven“. Die Indifferenzkurven erhält man, wenn man die Indifferenzklassen grafisch darstellt.

<sup>11</sup> Man beachte, dass, wenn man die Indifferenzklassen in dieser Weise durch die in ihnen enthaltenen Güter identifiziert, unterschiedlich idizierte Indifferenzklassen, z.B.  $I_a, I_b$  durchaus ein- und dieselbe Indifferenzklasse darstellen können, nämlich dann, wenn zwischen den Gütern im Index Indifferenz herrscht, also wenn  $a \sim b$ .



können nun den Indifferenzklassen bzw. ihren Elementen Zahlen zuordnen, deren Ordnung der Ordnung der Indifferenzklassen entspricht. Diese Zuordnung bezeichnen wir als *Nutzenfunktion* oder auch als *Nutzenskala*, wobei die Nutzenskala jedoch strenggenommen die Zielmenge der Nutzenfunktion ist. Eine Nutzenfunktion  $u : G \mapsto \mathbb{R}$  ist also eine Abbildung der Gütermenge  $G$  auf die reellen Zahlen, für die Folgendes gelten muss:

Nutzen-  
funktionen und  
Nutzenskalen

$$u(x) > u(y) \quad \text{genau dann wenn} \quad x \succ y \quad (1.2.1)$$

$$u(x) = u(y) \quad \text{genau dann wenn} \quad x \sim y \quad (1.2.2)$$

Wichtig ist dabei, dass bei dieser Art von Nutzenfunktionen, den zugeordneten Zahlenwerten keine andere Bedeutung zukommt als diejenige, das Ordnungsverhältnis zwischen den Gütern auszudrücken. Man kann also z.B. sagen, dass ein Gut  $x$ , dem eine Nutzenfunktion den Wert 4 zuordnet, nützlicher ist als ein Gut  $y$ , dem sie den Wert 1 zuordnet. Aber es wäre falsch zu sagen, dass das Gut  $x$  viermal so nützlich ist, wie das Gut  $y$ . Die beiden folgenden Nutzenfunktionen drücken dementsprechend denselben Nutzen aus:

G	x	y	z	G	x	y	z
u	1	2	3	v	-1	2	7

Man nennt die so interpretierten Nutzenfunktionen auch *ordinale Nutzenfunktionen*. Zwei ordinale Nutzenfunktionen beschreiben genau dann denselben Nutzen, wenn sie sich durch „ordnungserhaltende Transformationen“ ineinander überführen lassen. Eine ordnungserhaltende oder auch „*ordinale Transformation*“ ist eine Transformation, die die Bedingung erfüllt:

ordinale Trans-  
formationen

$$t(a) > t(b) \quad \text{genau dann wenn} \quad a > b \quad \text{für alle} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1.2.3)$$

wobei  $G$  die Gütermenge und  $t : \{u(x) | x \in G\} \mapsto \mathbb{R}$  die Transformation der Nutzenskala  $u$  in eine andere Nutzenskala ist.

Mit Hilfe ordinaler Nutzenskalen lassen sich unsere Entscheidungstabellen (oder unsere Entscheidungsbäume) in einer noch einfacheren und übersichtlicheren Form darstellen, indem wir die möglichen Resultate des Entscheidungsprozesse durch ihre Zahlenwerte auf einer (beliebigen) Nutzenskala wiedergeben. Die Entscheidungstabellen sehen dann noch einmal etwas schematischer aus, z.B. so:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$A_1$	3	7	2	0
$A_2$	2	1	2	-1
$A_3$	4	6	5	0

Ein Vorteil dieser Darstellung besteht darin, dass sich Entscheidungsregeln besonders leicht anwenden lassen, da sich die Präferenzordnung unmittelbar an der Größe der Zahlen ablesen lässt. In diesem Beispiel kann man beinahe sofort „sehen“, dass die Entscheidung  $A_2$  durch beide anderen Handlungsalternativen dominiert wird und damit sicherlich ausscheidet. Welche der verbleibenden Alternativen gewählt werden sollte, lässt sich anhand der Dominanz allein nicht mehr entscheiden. Dafür benötigt man weitergehende Entscheidungsregeln, denen wir uns nun zuwenden.

#### 1.2.4 Entscheidungsregeln auf Basis des ordinalen Nutzens

Mit dem *ordinalen Nutzen* haben wir das Rüstzeug um einige einfache Entscheidungsregeln zu formulieren. Für kompliziertere Entscheidungsregeln benötigen wir stärkere Nutzenkonzepte, wie das des kardinalen Nutzens bzw. der „Neumann-Morgensternschen Nutzenfunktion“, die weiter unten besprochen wird (Kapitel 4.1). Im folgenden werden wir mehrere unterschiedliche Entscheidungsregeln besprechen, die alle auf ihre Weise sinnvoll sind, deren Anwendung aber interessanterweise zu jeweils anderen Entscheidungsempfehlungen führt. Wenn diese Regeln aber jeweils unterschiedliche Entscheidungsempfehlungen nahelegen, dann wirft das die Frage auf, welche dieser Regeln denn nun eigentlich die „richtige“ Entscheidung empfiehlt. Dazu ist zu sagen, dass es im Bereich der „Entscheidungen unter Unwissen“ keine unter allen Umständen beste Regel gibt. Alle der in dieser und der nächsten Woche besprochenen Regeln haben ihre relative Berechtigung, je nach der Situation in der sich das Entscheidungsproblem stellt. Anders sieht die Sache erst aus, wenn wir Entscheidungen unter Risiko betrachten. Denn dort kann man zeigen, dass mit der *Erwartungsnutzenhypothese* unter wenigen Einschränkungen in der Tat so etwas wie eine eindeutig beste Entscheidungsregel vorhanden ist.

Bei den Entscheidungen unter Unwissenheit gibt es aber keine solche beste oder einzig richtige Regel. Daher stellt sich bei jeder der folgenden Regeln die Frage: Wann sollte man sie anwenden? Oder auch: Warum sollte man gerade diese Regel anwenden? Die Antwort auf diese Fragen muss zwangsläufig von der Situation und/oder von subjektiven Voraussetzungen wie Vorlieben oder Abneigungen abhängig sein. Denn gäbe es eine generelle Antwort, dann hätte man damit auch eine beste Regel.

### Die Maximin-Regel

Die erste Entscheidungsregel, die wir besprechen wollen, ist die sogenannte *Maximin-Regel*, die besagt, dass man die Verluste minimieren soll, oder, was dasselbe ist, dass man das minimale Ergebnis maximieren soll. (Eben deshalb heißt sie „Maximin-Regel“.) Mit Hilfe von Entscheidungstabellen kann man die Regel folgendermaßen anwenden: Zunächst markiert man in jeder Zeile (also für jede Handlungsalternative) den kleinsten Nutzenwert. Und anschließend wählt man diejenige Handlung aus, bei der markierte Wert von allen am größten ist. Das sieht dann folgendermaßen aus:

einfache  
Maximinregel

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$A_1$	3	4	7	1*
$A_2$	-6*	12	2	2
$A_3$	5	0*	3	1
$A_4^{**}$	2*	4	3	2*
$A_5$	3	5	5	1*

Die nach der Maximin-Regel beste Entscheidung ist in diesem Fall also die Entscheidung  $A_4$ , weil das schlechteste mögliche Ergebnis bei dieser Entscheidung mit einer 2 bewertet ist, während es bei allen anderen Entscheidungen einen noch niedrigeren Wert hat. (Dass der Wert 2 dabei bei dieser Entscheidung zweimal vorkommt, schadet nicht.)

Führt diese Entscheidungsregel immer zu einem eindeutigen Ergebnis? Nicht unbedingt, denn es ist ja möglich dass das schlechteste mögliche Ergebnis mehrerer Handlungsalternativen den gleichen Nutzenwert hat. Wie sollte man nun vorgehen? Eine naheliegende Erweiterung der Maximin-Regel besagt, dass man in diesem Fall unter den verbleibenden Handlungsalternativen nach dem zweitschlechtesten Ergebnis auswählen soll, dann nach dem drittschlechtesten usf. Diese Erweiterung der Maximin-Regel nennt man auch die *lexikalische Maximin-Regel*. Auf ein Beispiel angewandt, funktioniert das folgendermaßen:

lexikalische  
Maximinregel

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$A_1$	2	4	1*	6
$A_2$	0*	3	12	7
$A_3^*$	5	2*	3	4
$A_4$	2	-1*	7	1
$A_5^*$	2*	6	4	5

Nach dem ersten Schritt bleiben also nur noch die Entscheidungen  $A_3$  und  $A_5$  übrig. Im zweiten Schritt reduzieren wir die Tabelle auf diese beiden

Strategien und ignorieren das jeweils schlechteste Ergebnis, um uns nun nach dem zweitschlechtesten zu richten:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$A_3$	5	x	3*	4
$A_5^{**}$	x	6	4*	5

Die beste Entscheidung nach der lexikalischen Minimax-Regel besteht also in der Wahl der Handlung  $A_5$ . (Und wenn selbst die lexikalische Minimax-Regel kein eindeutiges Ergebnis zu Tage fördert, dann ist es wirklich egal, welche der verbleibenden Handlungen man wählt, oder?)

Sollte der kleinste Wert, wie in der folgenden Tabelle, mehrmals vorkommen, dann darf er nur einmal gestrichen werden, wobei es beliebig ist, an welcher Stelle er gestrichen wird:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$A_1$	-1	2	100
$A_2$	-1	-1	3

Beispielsweise könnte man im ersten Schritt den Wert -1 in der zweiten Zeile in der zweiten Spalte streichen:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$A_1$	x	2	100
$A_2$	-1	x	3

Damit ist klar, dass die Handlung  $A_1$  gewählt werden sollte, denn in der reduzierten Tabelle ist der minimale Gewinn bei Handlung  $A_1$  mit 2 größer als bei Handlung  $A_2$  mit -1.

In welchen Situationen bietet sich die Verwendung der Minimax-Regel an? Sicherlich wird man dann auf diese Regel zurückgreifen, wenn es bei irgendeiner Entscheidungssituation vor allem darum geht, Schäden zu vermeiden, also z.B. wenn Leib und Leben in Gefahr geraten könnten. Ein sehr berühmtes Beispiel für die Anwendung der Maximin-Regel in der Philosophie hat John Rawls geliefert, der in seiner „Theorie der Gerechtigkeit“ fordert, dass man die Gerechtigkeit der Gesellschaftsordnung nach dem Maximin-Prinzip beurteilen soll: Diejenige Gesellschaftsordnung ist die Gerechteste, in der es den am schlechtesten Gestellten im Vergleich zu allen anderen möglichen und, so eine weitere Forderung von Rawls, *freien* Gesellschaftsordnungen am Besten geht (Rawls, 1971, S. 96ff.). Damit setzt sich Rawls bewusst vom Utilitarismus ab, der bekanntlich fordert, den Gesamtnutzen aller zu maximieren. Wir werden in der nächsten Vorlesungsstunde auf diese Diskussion noch ausführlicher eingehen (Kapitel 1.4.4).

Anwendung  
der  
lexikalischen  
Maximin-Regel

### Die Maximax-Regel

Analog zur Maximin-Regel könnte man, wenn man wollte, auch eine *Maximax*-Regel formulieren. Nach der Maximax-Regel müsste dann diejenige Handlung gewählt werden, bei der der maximale Erfolg am größten ist. Diese Regel ist eher etwas für ausgeprägte Optimisten oder sehr risikobereite Menschen oder für Situationen, in denen es mehr darauf ankommt, Kühnheit und Sportsgeist zu zeigen als Vorsicht und Besonnenheit. Genauso wie sich zur Maximin-Regel eine lexikalische Maximin-Regel bilden lässt, ließe sich ebenfalls eine lexikalische Maximax-Regel zur Maximax-Regel formulieren.

### Die Rangordnungsregel

Wie würde man die Lösung zu beurteilen haben, die die Maximin-Regel für folgendes Beispiel liefert:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$\dots$	$S_{100}$
$A_1$	0	2	2	$\dots$	2
$A_2$	1	1	1	$\dots$	1

Nach der Maximin-Regel müsste man  $A_2$  wählen. Das bedeutet aber, man zieht  $A_2$  der Handlung  $A_1$  vor, obwohl von 100 Fällen  $A_2$  nur in einem einzigen nicht schlechter ist als  $A_1$ . Das könnte – je nach Situation – wenig sinnvoll erscheinen und verdeutlicht, dass die Eigenschaft der Maximin-Regel jeweils nur ein einzelnes Spaltenelement in die Prüfung einzubeziehen unter Umständen eine Schwäche sein kann. Könnte man eine Regel formulieren, die dieser Schwierigkeit entgeht?

Denkbar wäre z.B. folgende Regel: Man bestimme für jedes Element innerhalb jeder Zeile, welchen Rang es innerhalb seiner Spalte hat. Dann summiere man die gefundenen Werte zeilenweise auf und wähle die Handlung, deren Zeile die kleinste Summe hat. (Bei dieser Regel bestimmen wir erst den Rang statt unmittelbar mit den Zahlen in der Tabelle zu rechnen, weil es wenig Sinn hat, mit ordinalen Nutzenwerten zu rechnen, die ja nur dazu dienen sollen, eine Rangfolge wiederzugeben.) Nach diesem Verfahren würde die Handlung  $A_1$  eine Rangzahl von 101 erhalten, da ihr Ergebnis in 99 von hundert möglichen Fällen auf den ersten Rang kommt und in einem Fall auf den zweiten ( $99 \cdot 1 + 2 = 101$ ). Die Handlung  $A_2$  würde eine Rangzahl von 199 erhalten ( $1 \cdot 1 + 99 \cdot 2 = 199$ ). Damit müsste nach dieser Regel  $A_1$  gewählt werden.

Rangordnungs-  
regel

Natürlich ist auch die Rangordnungsregel nicht vollkommen. So kann es Fälle geben, in denen die Rangzahlen mehrerer oder gar aller Handlungsalternativen genau gleich sind. Aber in diesen Fällen kann man dann immer

noch unbedenklich auf die Maximin-Regel zurückgreifen, da dann praktisch ausgeschlossen ist, dass es sich um eine für die Maximin-Regel problematische Situation wie die in der Tabelle weiter oben dargestellte handelt.

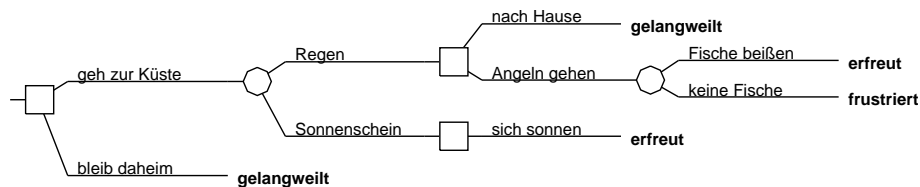
weitere  
Entscheidungs-  
regeln?

Mit der Maximin-, der Maximax- und der Rangordnungsregel haben wir drei Entscheidungsregeln vorgestellt, die sich bei Entscheidungen unter Unwissen und bei bloß ordinalen Nutzenwerten anwenden lassen, wobei die wichtigste dieser Regeln die Maximin-Regel ist. Stellt sich die Frage: Könnte es noch weitere Regeln für diese Art von Entscheidungsproblemen geben? Das ist allerdings anzunehmen. Vielleicht fällt Ihnen selbst eine weitere Regel ein. Dabei ist zu beachten, dass eine gute Entscheidungsregel folgenden Bedingungen genügen muss:

1. Sie muss stabil bezüglich ordinaler Transformationen der Nutzenwerte sein, d.h. wenn man die Nutzenwerte in der Entscheidungstabelle durch ordinal transformierte ersetzt, sollte die Entscheidungsregel immer noch dieselbe Entscheidung empfehlen.
2. Es sollte irgendwelche plausiblen Gründe geben, die für diese Entscheidungsregel sprechen, z.B. besondere Entscheidungssituationen, in denen sie intuitiv sinnvoll erscheint.
3. Es sollte möglichst wenig Gegenbeispiele in Form von denkbaren Entscheidungsproblemen geben, bei denen die Anwendung der Regel abwegig erscheint.

### 1.2.5 Aufgaben

1. Kann man auf Grund des Dominanzprinzips bei dem folgenden Entscheidungsproblem bereits feststellen, welche Handlungsalternative gewählt werden sollte oder zumindest sagen, ob eine bestimmte Handlungsalternative definitiv nicht gewählt werden sollte?



Erklären Sie Ihre Antwort sowohl anhand der Baum- als auch anhand der Tabellendarstellung (Seite 13). Welche Darstellungsform eignet sich dafür besser?

2. Welche Handlungen sollten bei den beiden folgenden Entscheidungstabellen nach der lexikalischen Maximin-Regel gewählt werden:

	Tabelle 1:					Tabelle 2:			
$A_1$	1	-3	5	6	$A_1$	0	1	1	3
$A_2$	2	2	3	3	$A_2$	0	4	2	3
$A_3$	4	6	-10	6	$A_3$	3	0	0	1

Quelle: Michael D. Resnik: Choices. An Introduction to Decision Theory, Minnesota 2000, S. 27.

3. Zeige anhand der folgenden Tabelle: Wenn man die lexikalische Maximin-Regel so abändert, dass der kleinste Wert, sofern er in einer Zeile mehrmals vorkommt, nicht nur einmal sondern an allen Stellen gestrichen werden soll, so führt dies dazu, dass durch die lexikalische Maximin-Regel das Prinzip der Dominanz verletzt werden könnte:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$A_1$	-1	2	100
$A_2$	-1	-1	3

4. Wie kann man die Maximin-Regel bei Entscheidungsbäumen anwenden?

5. Sei  $u(x)$  eine Nutzenskala, die eine Präferenzordnung wiedergibt. Dann gilt: a)  $u(x) > u(y) \Leftrightarrow x \succ y$  und b)  $u(x) = u(y) \Leftrightarrow x \sim y$ . *Beweise:* Beide Bedingungen gelten auch für die transformierte Nutzenskala  $t(u(x))$ , sofern  $t$  der Bedingung für *ordinale Transformationen* genügt:  $t(a) > t(b) \Leftrightarrow a > b$  und  $t(a) = t(b) \Leftrightarrow a = b$  für alle  $a, b$  auf der Nutzenskala  $u$ .

### Schwierigere Aufgabe

6. In der Vorlesung wurde die Präferenzrelation genaugenommen durch zwei Relationen, nämlich durch die Relation der strikten Präferenz  $\succ$  und die Relation der Indifferenz  $\sim$  eingeführt. Zeigen Sie, dass man auch mit einer einzigen Relation, der schwachen Präferenz  $\succeq$  auskommen kann. Geben Sie dazu geeignete Axiome für die Relation  $\succeq$  an. Definieren Sie dann die Relationen  $\succ$  und  $\sim$  durch die Relation  $\succeq$ , und zeigen Sie anschließend, dass für die so definierten Relationen  $\succ$  und  $\sim$  die für sie in der Vorlesung angegebenen Axiome gelten.



## 1.3 Entscheidungen unter Unwissenheit II

In dieser Woche werden wir den Begriff des kardinalen Nutzen (bzw. des „Neumann-Morgensternschen“ Nutzens) einführen und einige weitere Entscheidungsregeln kennen lernen, die auf diesem Nutzenkonzept beruhen. Aus didaktischen Gründen wird erst ein Beispiel besprochen, in dem bereits der kardinale Nutzen<sup>12</sup> vorausgesetzt wird und erst danach der kardinale Nutzenbegriff selbst eingeführt.

### 1.3.1 Die Minimax-Bedauerns-Regel

Von den bisher besprochenen Entscheidungsregeln ist die Maximin-Regel wahrscheinlich die einleuchtendste und sinnvollste, aber wir haben auch schon ein Beispiel kennen gelernt, bei dem ihre Anwendung möglicherweise nicht sinnvoll wäre, und man kann weitere Beispiele konstruieren, bei denen das noch deutlicher der Fall ist, z.B. das folgende:

	$S_1$	$S_2$
$A_1$	€ 1,25	€ 1,50
$A_2$	€ 1,00	€ 50.000

Nach der Maximin-Regel müsste die Entscheidung zugunsten der Handlung  $A_1$  ausfallen. Aber ist es sinnvoll, sich die Chance auf € 50.000 entgehen zu lassen, nur um einen möglichen Verlust von 25 Cent zu vermeiden? Wenn man nicht gerade eine Geschichte erfindet, bei der von diesen 25 Cent Leben und Tod abhängen, erscheint das mehr als zweifelhaft. Um Situationen wie dieser gerecht zu werden, gibt es eine Regel, die darauf zielt, „verpasste Chancen“ zu vermeiden. Diese Regel ist die *Minimax-Bedauerns-Regel* (wohlbemerkt: diesmal heißt es „Minimax“ nicht „Maximin“!). Bei dieser Regel leitet man von der ursprünglichen Tabelle zunächst eine Bedauernstabelle ab, die für jede Entscheidung und jedes möglicherweise eintretende Ereignis (bzw. jeden möglichen Weltzustand) die Größe der verpassten Chance bezieht. Dann wählt man diejenige Entscheidung aus, bei der die größtmögliche verpasste Chance am kleinsten ist. Die Einträge in der Bedauernstabelle erhält man, indem man jeden Wert in der Tabelle vom Maximalwert derselben Spalte abzieht. Für das Beispiel von eben würde die Bedauernstabelle dann so aussehen:

Minimax-  
Bedauerns-  
Regel

	$S_1$	$S_2$
$A_1$	€ 0	€ 49.998,50
$A_2$	€ 0,25	€ 0

<sup>12</sup>Genaugenommen handelt es sich bei dem folgenden Beispiel um einen kardinalen Wert, nämlich der Geldwert

Das maximale Bedauern für die Handlung  $A_1$  würde also mit € 49.998,50 zu beziffern sein, während bei der Wahl von  $A_2$  schlimmstenfalls ein Verlust von 25 Cent verschmerzt werden müsste. Um das maximale Bedauern zu minimieren, muss nach der Minimax-Bedauernsregel also die Handlung  $A_2$  gewählt werden.

Ähnlich wie die die Maximin-Regel kann man die Minimax-Bedauernsregel auch *lexikalisch* mehrfach hintereinander anwenden, wenn nicht gleich bei der ersten Anwendung eine eindeutige Entscheidung getroffen werden kann.

Rechnen mit  
Nutzenwerten?

An dieser Stelle könnte jedoch ein Einwand erhoben werden: Beim Übergang von der Entscheidungstabelle zur Bedauernstabelle haben wir bestimmte Einträge in der Tabelle voneinander subtrahiert. Da es sich um Geldbeträge handelte, war das denkbar unproblematisch, denn jeder wird zugeben, dass man mit Geldbeträgen rechnen kann, und dass man sinnvollerweise davon sprechen kann dass € 3 dreimal so viel Wert sind wie € 1. Aber was ist, wenn wir es nicht mit Geldbeträgen, sondern wie zuvor mit ordinalen Nutzenwerten zu tun? Den vergleichsweise voraussetzungsarmen Begriff des ordinalen Nutzens haben wir ja gerade deshalb eingeführt, weil man mit anderen Werten als Geldbeträgen nicht unbedingt Rechnungen durchführen kann, selbst wenn sich die Größe des Wertes noch unterscheiden lässt. (Beispiel: Die meisten Menschen würden wohl zustimmen, dass Bier und Würstchen leckerer sind als Brot und Wasser, aber es wäre Unsinn zu sagen, sie sind genau dreimal so lecker.) Wenn wir eine Bedauernstabelle mit ordinalen Nutzenwerten berechnen würden, dann würde sich das Ergebnis, das bei der Anwendung der Minimax-Bedauerns-Regel herauskäme ändern, wenn wir die Nutzenwerte durch ordinal transformierte Nutzenwerte ersetzen, was bei einer robusten Entscheidungsregel nicht vorkommen sollte. Daher müssen wir entweder auf die Anwendung der Minimax-Bedauerns-Regel verzichten, oder wir dürfen sie nur dort anwenden, wo wir einen stärkeren Nutzenbegriff voraussetzen dürfen, wie er z.B. implizit den in den vorhergehenden Beispielen verwendeten Geldwerten zu Grunde liegt. Der schwächstmögliche stärkere Nutzenbegriff (stärker im Vergleich zum ordinalen Nutzen), der es uns erlaubt die Minimax-Bedauerns-Regel anzuwenden, ist der Begriff des kardinalen Nutzens.

Bevor wir jedoch auf den Begriff des kardinalen Nutzens eingehen, soll aber noch auf eine besondere Eigenschaft der Minimax-Bedauerns-Regel hingewiesen werden, die unter Umständen auch als ein Einwand gegen diese Regel begriffen werden kann: Die Minimax-Bedauerns-Regel verletzt nämlich – ebenso wie übrigens auf die Rangordnungsregel aus Kapitel 1.2.4 – das Prinzip der *paarweisen Unabhängigkeit* oder auch „Unabhängigkeit von

dritten Alternativen“.<sup>13</sup> Fügt man den bestehenden Handlungsalternativen eine Handlungsalternative hinzu, so kann das selbst dann zu einer Änderung der Entscheidung führen, wenn die neu hinzugefügte Alternative nach der Minimax-Bedauerns-Regel sowieso nicht gewählt werden würde. Beispiel:

Unabhängig-  
keit von  
dritten  
Alternativen

Entscheidungstabelle				„Bedauerns“-tabelle			
$A_1$	0	10	4	$A_1$	5	0	6
$A_2$	5	2	10	$A_2$	0	8	0
$A_1$	0	10	4	$A_1$	10	0	6
$A_2$	5	2	10	$A_2$	5	8	0
$A_3$	10	5	1	$A_3$	0	5	9

Quelle: Michael D. Resnik: Choices. An Introduction to Decision Theory, Minnesota 2000, S. 31.

Die Alternative  $A_3$  hat nach der Minimax-Bedauerns-Regel keine Chance gewählt zu werden. Dennoch übt ihre Präsenz Einfluss darauf aus, welche der beiden anderen Handlungsalternativen nach der Minimax-Bedauerns-Regel gewählt wird. Ist die Alternative  $A_3$  abwesend, so ist die Handlung  $A_1$  nach der Minimax-Bedauerns-Regel die beste Handlung. Fügt man die Alternative  $A_3$  hinzu, so ist  $A_2$  die beste Handlung.

Sollte man die Abhängigkeit von dritten Alternativen als eine Schwäche der Minimax-Bedauerns-Regel ansehen? Das hängt wiederum sehr davon ab, in welchem Zusammenhang die Entscheidungsregel angewandt wird. Da das Prinzip besonders in der Sozialwahltheorie eine große Rolle spielt, dazu einige Beispiele:

1. Resnik erzählt dazu in etwa die folgende Geschichte (Resnik, 2000, S. 40): Stellen Sie sich vor, Sie sitzen in einem Restaurant und überlegen, ob Sie lieber ein Steak oder ein vegetarisches Gericht bestellen wollen. Eigentlich mögen Sie lieber Steak, aber da das Restaurant einen etwas heruntergekommenen Eindruck macht, haben Sie wegen der Fleischzubereitung so ihre Bedenken und tendieren eher zu einer vegetarischen Speise. Nun erzählt Ihnen die Dame vom Nebentisch, dass sie gerade ein vorzügliches Schnitzel gegessen hat. Sie selbst – nehmen wir an – mögen zwar kein Schnitzel, aber obwohl diese Alternative für Sie „irrelevant“ ist, wissen Sie nun, dass Sie der Fleischzubereitung in diesem Restaurant vertrauen können, und bestellen doch das Steak.

Beispiele für  
die mögliche  
Relevanz von  
dritten  
Alternativen

<sup>13</sup>Die dafür häufig auch verwendete Bezeichnung „Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen“ ist wegen ihrer Suggestivität irreführend. Es ist nämlich keineswegs immer so, dass dritte Alternativen grundsätzlich irrelevant sind.

2. Frau Schmidt möchte ein Auto kaufen. Sie legt Wert darauf, dass es das teuerste und, wenn nicht das teuerste, dann doch wenigstens das schnellste Auto von der ganzen Stadt ist. Also entscheidet sie sich gegen einen Porsche und für einen S-Klasse Mercedes, weil der teurer ist. Jetzt erfährt sie aber, dass ihre Nachbarin Frau Klein sich kürzlich einen Rolls-Royce zugelegt hat. Einen Rolls-Royce kann sich Frau Schmitt aber sowieso nicht leisten. Da sie dann aber statt des teuersten wenigstens das schnellste Auto haben will, kauft sie sich nun doch nicht den Mercedes, sondern lieber den Porsche.

Ihre Wahl zwischen Porsche und Mercedes ist also nicht unabhängig von dritten Alternativen, auch diese für Frau Schmitt sowieso nicht in Frage kommen, wie in diesem Fall der Rolls Royce.

3. *Machinas Paradox*: Angenommen, eine Person habe die Wahl zwischen zwei Lotterien:
  - (a) Lotterie: 99% Chance eine Reise nach Venedig zu gewinnen, 1% Chance eine Filmvorführung über Venedig zu gewinnen.
  - (b) Lotterie: 99% Chance eine Reise nach Venedig zu gewinnen, 1% Chance zu Hause zu bleiben.

Im Sinne der Theorie müsste die erste Lotterie eindeutig bevorzugt werden, wenn man annimmt, dass einen Film über Venedig anzuschauen allemal interessanter ist, als zu Hause zu sitzen. Andererseits ist es durchaus plausibel sich vorzustellen, dass angesichts der sehr großen Chance eine Reise nach Venedig zu gewinnen, es doch noch erträglicher ist zu Hause zu bleiben, wenn man die Chance verpasst, als sich dann auch noch einen herrlichen Film über Venedig anschauen zu müssen.

Wenn man diese Argumentation akzeptiert, dann zeigt das Beispiel einmal mehr, dass die Annahme der Unabhängigkeit von dritten Alternativen, z.B. auf Grund solcher psychologischen Faktoren wie des Bedauerns, nicht immer zwingend oder auch nur glaubwürdig ist. Oder gäbe es vielleicht eine Möglichkeit, das Beispiel durch eine entsprechende Problemspezifikation, z.B. durch Einbeziehen des Bedauernsfaktors in die Konsequenz der Entscheidung, doch noch mit der Theorie zu vereinbaren? (Aufgabe 8!)

4. *Mögliche Bedeutung der Rangordnung* (Mackie, 2003, S. 81): Wie bereits erwähnt ist auch die Rangordnungsregel nicht mit dem Prinzip der paarweisen Unabhängigkeit vereinbar. Hält man Entscheidungsregeln wie die Minimax-Bedauernsregel oder die Rangordnungsregel für

sinnvoll, so kann man diese Unvereinbarkeit statt gegen bestimmte Entscheidungsregeln umgekehrt auch gegen das Prinzip der paarweisen Unabhängigkeit ausspielen.

Vorgreifend auf die Sozialwahltheorie sei zur Illustration der möglichen Relevanz der Rangordnung von Präferenzen und damit auch der Relevanz von dritten Alternativen folgendes Beispiel diskutiert: Angenommen Napoleon habe die Präferenzen  $b \succ a \succ c \succ d \succ e$  und Josephine  $a \succ b \succ c \succ d \succ e$ . Es sei weiterhin angenommen, dass Napoleon und Josephine sich darauf einigen müssten, ob sie gemeinsam  $a$  oder  $b$  wählen wollen, und dass Napoleon sich nach langwierigen Diskussionen schließlich durchgesetzt habe sie gemeinsam  $b$  wählen.

Nun erhält Josephine eine Nachricht, die dazu führt, dass sie ihre Präferenzen dergestalt abändert, dass die Alternative  $b$  nun für sie an die letzte Stelle rückt, so dass sie nun die Präferenzen  $a \succ c \succ d \succ e \succ b$  hat.

Josephine teilt dies Napoleon mit, und bittet darum, auf Grund der geänderten Umstände die gemeinsame Entscheidung noch einmal zu überdenken. Napoleon antwortet ihr jedoch mit dem Hinweis auf das Prinzip der Unabhängigkeit von „irrelevanten“ Alternativen, dass dies nicht erforderlich sei, da sich Josephines Präferenzen bezüglich  $a$  und  $b$  durch die neu eingetretenen Umstände nicht geändert hätten, so dass sie die Entscheidung zwischen  $a$  und  $b$  gar nicht beeinflussen dürften.

Sofern man Napoleons Antwort als unverschämt empfindet, ist dieses Beispiel ein Gegenbeispiel gegen die generelle Gültigkeit des „Prinzips der Unabhängigkeit von dritten Alternativen“. Das Beispiel zeigt, dass das Prinzip der Unabhängigkeit von dritten Alternativen uns zwingt, von der Information über die Rangordnung der beiden zur Entscheidung anstehenden Alternativen innerhalb einer größeren Menge von Alternativen zu abstrahieren. Aber unter Umständen könnte diese Information wichtig sein, z.B. indem sie die Intensität einer Präferenz ausdrückt und sofern man der Ansicht ist, dass die Intensität der individuellen Präferenzen bei der Diskussion über gemeinsame Entscheidungen wie der von Napoleon und Josephine mitberücksichtigt werden sollte.

Man kann es auch so formulieren: Eine dogmatische Festlegung auf das Prinzip der Unabhängigkeit von dritten Alternativen würde Entscheidungsprobleme wie das von Napoleon und Josephine aus dem Anwendungsbereich der Entscheidungstheorie ausschließen.

Wie man sieht können dritte Alternativen sehr wohl relevant für die relative Bewertung der anderen Alternativen sein. Insofern muss die Abhängigkeit

von dritten („irrelevanten“) Alternativen nicht unbedingt als eine Schwäche der Entscheidungsregel aufgefasst werden. Aber es gibt andere Situationen, wo das durchaus der Fall sein kann, etwa bei Wahlen oder Abstimmungen, deren Ergebnis unter Umständen dadurch manipuliert werden könnte, dass man weitere, scheinbar irrelevante Alternativen zur Abstimmung stellt.<sup>14</sup> Insgesamt kann man sagen, dass das Prinzip der Unabhängigkeit von dritten Alternativen bzw. der paarweisen Unabhängigkeit nur dann aufgestellt werden sollte, wenn man zuvor sichergestellt hat, dass für die Entscheidung zwischen jedem Paar von Alternativen (bzw. für die relative Bewertung von jedem Paar von Alternativen) die Verfügbarkeit der anderen Alternativen tatsächlich irrelevant ist. In einer Entscheidungssituation, wo dies nicht der Fall ist, kann eine Theorie, die dieses Prinzip als Axiom einführt, nicht ohne Einschränkungen angewendet werden.

### 1.3.2 Kardinaler Nutzen

Grenzen des  
ordinalen  
Nutzens

Der Grundgedanke der „Minimax-Bedauerns-Regel“ besteht darin, eine Entscheidung zu finden, bei der der maximal mögliche Verlust (je nach eintretenden Zufallsereignissen) minimiert wird. Da wir diese Regel auf ein Beispiel mit Geldwerten angewendet haben, konnten wir die Verluste relativ bedenkenlos als die Differenz zwischen entgangenem Gewinn und erhaltenem Gewinn bestimmen. Aber wie sollen wir eine solche Regel wie die „Minimax-Bedauerns-Regel“ anwenden, wenn die (möglichen) Ergebnisse eines Entscheidungsproblems keine Geldwerte sind? Die Ihnen zugeordneten Nutzenwerte spiegeln dann – nach dem Konzept des *ordinalen Nutzens* – nur eine Rangordnung zwischen den möglichen Ergebnissen des Entscheidungsprozesses entsprechend den Präferenzen wieder. Das Ergebnis der Anwendung einer Entscheidungsregel sollte also auch nur von der Rangordnung der Nutzenwerte nicht aber von den – solange die Ordnung erhalten bleibt – willkürlich wählbaren Zahlenwerten abhängen, die diese Ordnung auf einer Nutzenskala wiedergeben. Betrachten wir als Beispiel einmal folgende beiden Nutzenskalen, die den Ergebnissen  $x, y, z$  jeweils einen bestimmten Nutzen zuordnen. ( $x, y$  und  $z$  sollen dabei irgendwelche möglichen Resultate irgendeines Entscheidungsprozesses sein, z.B. könnten sie für die Resultate *frustriert*, *gelangweilt*, *erfreut* aus dem

<sup>14</sup>Theoretische Beispiele findet man in der entsprechenden Fachliteratur unter den Stichworten „Paradox of Voting“ und „Agenda Setting“ in Fülle (Mueller, 2003, S. 112ff.). Die empirische Relevanz des vermeintlichen Problems zyklischer Mehrheiten wird jedoch inzwischen sehr stark in Zweifel gezogen (Green and Shapiro, 1994, S. 147ff.). Praktisch spielen die Formen der Abstimmungsmanipulation, die in der Public Choice Literatur so ausführlich erörtert werden, keine Rolle, während andere, die womöglich viel wichtiger sind, von den Autoren der Public Choice Literatur nicht beachtet werden.

Beispiel auf Seite 13 stehen.)

$$\text{Nutzenskala } \mathbf{u}() \quad \frac{x}{1} \mid \frac{y}{2} \mid \frac{z}{3} \quad \text{Nutzenskala } \mathbf{v}() \quad \frac{x}{1} \mid \frac{y}{4} \mid \frac{z}{9}$$

Beide Skalen geben offenbar denselben ordinalen Nutzen wieder, da  $u(z) > u(y) > u(x)$  und ebenso  $v(z) > v(y) > v(x)$ . Betrachtet man allerdings die Differenzen, so fällt auf, dass  $u(z) - u(y) = u(y) - u(x)$ , während  $v(z) - v(y) > v(y) - v(x)$ . Würden diese Nutzenwerte bei einem Entscheidungsproblem auftauchen, so könnte es geschehen, dass man bei Anwendung der Minimax-Bedauernsregel je nachdem, ob man die Nutzenfunktion  $u$  oder die Nutzenfunktion  $v$  zur Darstellung der Präferenzen heranzieht, zu einer anderen Entscheidungsempfehlung kommt. Genau das dürfte aber nicht geschehen, da  $u$  und  $v$  nur unterschiedliche Darstellungen desselben *ordinalen* Nutzens sind. Welche Auswege könnte man sich aus dieser misslichen Situation denken:

1. Angesichts des Beispiels (Seite 41), mit dem wir die Minimax-Bedauernsregel eingeführt haben, könnte man auf die naheliegende Idee verfallen, dass man diese Regel nur in solchen Fällen anwenden kann, in denen die Ergebnisse des Entscheidungsprozesses monetäre Auszahlungen sind. Das hätte allerdings zwei Nachteile: 1) Die Anwendbarkeit der Regel würde dabei auf eine vergleichsweise kleine Menge von Entscheidungsproblemen eingeschränkt. 2) In vielen Situationen, in denen in irgendeiner Form monetäre Auszahlungen vorkommen, geben die monetären Auszahlungen nicht unmittelbar den damit assoziierten Nutzen wieder. Handlungsleitend und damit entscheidungsrelevant ist jedoch der Nutzen und nicht der Geldwert. Ein Beispiel dafür, dass Nutzen und Geldwert sich nicht decken müssen ist das folgende: 2.000 Euro sind doppelt so viel Geld wie 1.000 Euro. Aber der zusätzliche Nutzen, den man von 2.000 Euro Monatsgehalt gegenüber 1.000 Euro Monatsgehalt gewinnt, ist sicherlich geringer als der zusätzliche Nutzen von 1.000 Euro gegenüber 0 Euro Gehalt.
2. Eine andere denkbare Alternative wäre die Aufstellung einer *qualitativen Bedauernstabelle*. Dazu müsste man zunächst einmal die *Differenzergebnisse* bestimmen, worunter man zusammengesetzte Ergebnisse aus einem nicht eingetretenen und einem statt dessen eingetretenen Ergebnis verstehen kann. (In dem Beispiel des Küstenbesuchers aus der ersten Vorlesung (Seite 13), in dem die möglichen Resultate *frustriert*, *gelangweilt*, *erfreut* waren, würden sich daraus die Differenzereignisse *frustriert statt bloß gelangweilt*, *gelangweilt statt erfreut* und *frustriert*

Unterschied  
von Nutzen  
und Geldwert

*statt erfreut* ergeben.) Weiterhin müsste man ein neutrales Differenzereignis definieren, welches die Stelle der 0 in der aus Nutzenwerten gewonnenen Bedauernstabelle einnimmt. Dieses neutrale Differenzergebnis könnte man z.B. als „Unter gegebenen Umständen so gut wie möglich“ bezeichnen oder ähnlich. Schließlich müsste man die Präferenzen bezüglich der Differenzergebnisse bestimmen, denen man dann eine neue ordinale Nutzenfunktion zuweisen könnte. Die Bestimmung des minimalen größten Bedauerns erfolgt wie zuvor beschrieben (Siehe Abschnitt 1.3.1). Der Nachteil dieses Vorgehens besteht erstens darin, dass die Präferenzordnung für eine weitere Ergebnismenge, nämlich die Menge der Differenzergebnisse, bestimmt werden muss, und zweitens darin, dass sich dieses Verfahren tatsächlich nur auf die Minimax-Bedauerns-Regel anwenden lässt, nicht mehr aber auf die meisten weiteren Entscheidungsregeln, die wir gleich noch kennen lernen werden. In den Fällen aber, in denen wir nicht die gleich zu besprechende Neumann-Morgensternsche Nutzenfunktion bilden können (d.h. in den Fällen, in denen wir aus empirisch-sachlichen Gründen höchstens einen *ordinalen* Nutzen voraussetzen dürfen) bleibt die Bildung einer qualitativen Bedauernstabelle die einzige Alternative.

kardinaler  
Nutzen

3. Schließlich kann man versuchen, ein „stärkeres“ Nutzenkonzept als das des ordinalen Nutzens zu Grunde zu legen. Bei einem solchen Nutzenkonzept müsste nicht nur die Ordnung der Nutzenwerte unter einer Transformation erhalten bleiben sondern mindestens auch die Ordnung beliebiger Differenzen von Nutzenwerten. Stärker ist ein solches Nutzenkonzept in dem Sinne, dass die Nutzenwerte dann mehr Informationen enthalten als nur die Information über die Ordnung der Präferenzen. Das bedeutet aber auch, dass ein solches Nutzenkonzept empirisch schwerer zu rechtfertigen ist, und dass der empirische Anwendungsbereich eines solches Nutzenkonzepts kleiner sein wird als der des ordinalen Nutzens. Um die Ordnung der Differenzen zu erhalten, ist es aber andererseits noch längst nicht erforderlich, den konkreten Zahlenwerten der Nutzenfunktion eine eindeutige Interpretation zu geben, wie dies bei der Zuweisung von Geldwerten der Fall wäre. Gesucht ist also ein möglichst schwaches (und damit empirisch immer noch möglichst breit anwendbares) Nutzenkonzept, das aber stärker ist als das des Ordinalen Nutzens. Ein solches Nutzenkonzept ist das des *kardinalen* bzw. des *Neumann-Morgensternschen Nutzens*.

Das, was wir eben eher intuitiv die „Stärke“ eines Nutzenkonzepts genannt haben, ist dadurch bestimmt, unter welcher Art von Transformationen man



zwei Nutzenfunktionen als *äquivalent*, d.h. denselben Nutzen ausdrückend, betrachtet. (Man kann es also nicht den Nutzenfunktionen also solchen ansehen, ob sie einen ordinalen oder kardinalen Nutzen ausdrücken. Sondern erst durch den Vergleich von Nutzenfunktionen und der Festlegung der Bedingungen ihrer Äquivalenz oder Nicht-Äquivalenz wird dies bestimmt.) Beim *ordinalen Nutzen* wurden alle Nutzenfunktionen als äquivalent betrachtet, die durch „ordnungserhaltende“ Transformationen ineinander überführt werden können. „Ordnungserhaltend“ sind alle streng monoton steigenden Abbildungen. Der *kardinale Nutzen* ist nun dadurch definiert, dass zwei Nutzenfunktionen als äquivalent betrachtet werden, wenn man sie durch *positive lineare Transformationen* ineinander überführen kann. Positive lineare Transformationen sind alle Transformationen der Form:

$$u(x) = ax + b, \quad a > 0$$

Man betrachte unter diesem Gesichtspunkt einmal die folgenden, in Tabellen dargestellten Nutzenfunktionen:

$$\mathbf{u}() \begin{array}{c|c|c} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \mathbf{v}() \begin{array}{c|c|c} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \hline 1 & 4 & 9 \end{array} \quad \mathbf{w}() \begin{array}{c|c|c} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \hline 1 & 3 & 5 \end{array}$$

Alle drei Nutzenfunktionen geben denselben ordinalen Nutzen wieder, aber nur die Funktionen  $u$  und  $w$  geben denselben kardinalen Nutzen wieder, da  $w(x) = 2u(x) - 1$ . Weiterhin kann man sich leicht überlegen, dass zwei Nutzenfunktionen, die denselben kardinalen Nutzen darstellen, immer auch denselben ordinalen Nutzen repräsentieren, denn positive lineare Transformationen sind immer auch ordnungserhaltende Transformationen. Umgekehrt gilt dasselbe aber nicht, wie die Tabelle oben zeigt. Kardinale Nutzenskalen sind „feinkörniger“ als ordinale Nutzenskalen. Und sie erhalten, wie erwünscht nicht nur die Ordnung der Nutzenwerte sondern auch die Ordnung der Differenzen von Nutzenwerten, denn seien  $x, y, z, w \in \mathbb{R}$  beliebige Nutzenwerte und sei  $u(x) = ax + b$  mit  $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$  eine positive lineare Transformation, dann:

$$\begin{aligned} x - y &> z - w \\ a(x - y) &> a(z - w) \\ a(x - y) + b - b &> a(z - w) + b - b \\ (ax + b) - (ay + b) &> (az + b) - (aw + b) \\ u(x) - u(y) &> u(z) - u(w) \end{aligned}$$

Dasselbe gilt, wenn man statt des Ungleichheitszeichens ein Gleichheitszeichen einsetzt, womit der Erhalt der Ordnung von Nutzendifferenzen unter

Erhalt der  
Ordnung von  
Nutzendiffe-  
renzen

positiv linearer Transformation bewiesen ist. Positive lineare Transformationen haben darüber hinaus die Eigenschaft, dass sie nicht bloß die Ordnung der Differenzen von Nutzenwerten erhalten, sondern auch die Quotienten der Differenzen:

Erhalt der  
Quotienten  
von Nutzendif-  
ferenzen

$$\frac{u(x) - u(y)}{u(z) - u(w)} = \frac{(ax + b) - (ay + b)}{(az + b) - (aw + b)} = \frac{a(x - y) + b - b}{a(z - w) + b - b} = \frac{x - y}{z - w}$$

Diese Eigenschaft wird später noch für uns wichtig werden. Erfüllt eine Skala, wie in diesem Fall die kardinale Nutzenskala, diese Eigenschaft, so nennt man sie auch eine *Intervallskala*. Zur besseren Übersicht sollen im folgenden kurz einige der wichtigsten Skalentypen aufgelistet werden, die in der Wissenschaft von Bedeutung sind.

### Exkurs: Skalentypen

Skalen dienen dazu abgestufte Größen darzustellen. Nun gibt es unterschiedliche Grade, in denen irgendwelche Größen abgestuft sein können. (Mit dem ordinalen und dem kardinalen Nutzen haben wir schon zwei unterschiedliche Abstufungsgrade kennen gelernt.) Diese unterschiedlichen Abstufungsgrade spiegeln sich in den verschiedenen Skalentypen wieder. Die Skalentypen sind dabei von gröberen zu immer feineren Skalentypen geordnet. (Vgl. zum folgenden (Schurz, 2006, S. 73ff.))

Nominalskala

Das größte bzw. „niedrigste“ Skalenniveau, das man sich vorstellen kann, ist das einer **Nominalskala**. Bei einer Nominalskala wird die gegebene Größe lediglich in eine von mehreren begrifflichen Kategorien eingordnet, ohne dass zwischen diesen Kategorien eine Ordnung des Mehr- und Weniger besteht. Man spricht deshalb auch von „Kategorienskalen“ oder von „qualitativ-klassifikatorischen Begriffen“. Ein Beispiel wäre etwa die Zuordnung von Wirtschaftsunternehmen zu unterschiedlichen Wirtschaftssektoren wie a) Landwirtschaft, b) Handel und Industrie, c) Dienstleistung. Die einzigen Bedingungen, denen eine Nominalskala genügen muss, bestehen darin, dass die Kategorien 1. *disjunkt* (kein Gegenstand kann unter mehr als eine Kategorie gleichzeitig fallen) und 2. *exhaustativ* (jeder Gegenstand kann in mindestens eine Kategorie eingeordnet werden) sein müssen. Eine wie auch immer geartete Ordnungsbeziehung muss zwischen den Kategorien aber nicht bestehen. (Man kann ja auch z.B. kaum sinnvollerweise sagen, dass Dienstleistung „mehr“ oder „größer“ ist als Landwirtschaft. Allenfalls könnte man das von der Anzahl der Beschäftigten oder dem erwirtschafteten Umsatz in dem entsprechenden Sektor sagen.)

Ordinalskala/  
Rangskala

Das nächsthöhere Skalenniveau stellt die **Ordinalskala** (auch „Rangskala“) dar. Im Gegensatz zur Nominalskala werden hier die Merkmale bzw.

die Objekte des Gegenstandsbereichs in „Ranggruppen“ eingeteilt, zwischen denen eine Höher- und Niedriger-Beziehung besteht. (Für die präzise Definition einer solchen *Quasi-Ordnungs*-Beziehung siehe Seite 27) Außer dem nun schon bekannten ordinalen Nutzen, wäre ein weiteres Beispiel die Mohs-Skala aus der Mineralogie, bei der die Härte von Mineralien danach geordnet wird, welches Mineral welche anderen „ritz“ (Schurz, 2006, S. 75).

Auf die Ordinalskala folgt in der Rangfolge die **Intervallskala**. Intervallskalen verfügen über eine mehr oder weniger willkürlich gewählte Maßeinheit. Weder die Maßeinheit selbst noch der Nullpunkt einer Intervallskala sind in irgendeiner Weise durch den Gegenstandsbereich festgelegt. Voraussetzung ist jedoch, dass die auf einer Intervallskala abgebildete Größe zahlenmäßig empirisch messbar ist. Die Maßeinheit erlaubt es dann, Differenzen und Quotienten von Differenzen der gemessenen Größe zu vergleichen. Beispiele sind denn auch Orts- und Zeitmessungen, denn ob man das Jahr 0 auf Christi Geburt oder auf den Zeitpunkt der Auswanderung Mohammeds nach Medina verlegt, ist eine Sache bloßer Konvention, genauso wie es eine Konvention ist, dass der Nullmeridian in Greenwich liegt. Trotzdem kann man Zeit- und Ortsdifferenzen sowie Quotienten von Differenzen vergleichen (eine Stunde ist solange wie jede andere und drei Stunden sind dreimal solange wie eine Stunde).

Intervallskala

Die **Verhältnisskala** schießlich unterscheidet sich von der Intervallskala dadurch, dass nur noch die Maßeinheit willkürlich festgelegt ist, der Nullpunkt aber durch die Wirklichkeit vorgegeben ist. Beispiele dafür sind etwa Gewichtsskalen oder auch die Temperaturskala nach Kelvin, die den Nullpunkt auf den „absoluten Nullpunkt“ bei 273,15 Grad Celsius verlegt. Auch Geldwerten liegt eine Verhältnisskala zu Grunde, denn der Nullpunkt (d.h. wenn jemand gar kein Geld hat) ist ja in naheliegender Weise vorgegeben.

Verhältnisskala

Schließlich kann man von allen vorhergehenden Skalen noch die **Absolutskala** unterscheiden, bei der man verlangen müsste, dass auch die Maßeinheit selbst noch eine zwingende empirische Interpretation hat. Dergleichen ist aber im Grunde nur bei einfachen Zählskalen der Fall. Wenn man also z.B. von „drei Äpfeln“ spricht, dann hat die Zahl drei dabei einen ganz bestimmten empirischen Sinn und es ist nicht eine Frage der Konvention ob man drei oder zwei sagt, wie es eine Frage der Konvention ist, ob man eine Länge in Meter oder Fuß angibt.

Absolutskala

Insgesamt ergibt sich also eine Abfolge von fünf Skalentypen:

Nominalskala < Ordinalskala < Intervallskala < Verhältnisskala < Absolutskala

Im Anschluss an diese Auflistung von Skalentypen stellen sich zwei naheliegende Fragen: Erstens: Sind das alle Skalentypen, die es gibt? Und zweitens: Wonach richtet sich, welchen Skalentyp man verwenden kann oder soll?

Mehrdimen-  
sionale  
Skalen Was die erste Frage betrifft, so sind die aufgeführten Skalentypen natürlich längst nicht alle denkbaren Skalentypen. Einmal könnte man die Abfolge von Skalentypen sehr wohl noch weiter verfeinern. Dann gibt es, was noch wichtiger ist, neben den hier aufgeführten eindimensionalen Skalen auch mehrdimensionale Skalen. Zu diesen zählen beispielsweise Farbskalen bzw. Farbräume. Im RGB-Farbraum etwa wird jede Farbe durch ein 3-tupel des Rot-, Grün- und Blauwertes angegeben, aus denen die Farbe nach dem Prinzip der additiven Mischung zusammengesetzt ist.

Auswahl des  
Skalentyps Was die zweite Frage betrifft, so richtet sich die Verwendung eines bestimmten Skalentyps nach den *empirischen Eigenschaften* der auf der Skala abgebildeten Größe und nach den *vorhandenen Messmethoden*. So kann man die Länge deshalb auf einer Intervallskala messen, weil wir mit dem „Urmeter“ über einen entsprechenden Vergleichsmaßstab verfügen. Bei der Härtemessung von Materialien nach der Mohs-Skala gibt es keinen solchen Vergleichsmaßstab, so dass sie auch nicht auf einer Intervallskala, sondern nur auf einer Ordinalskala angegeben werden kann.

Schwierigkeiten  
der  
Metrisierung in  
den Sozialwis-  
sensschaften Besonders schwierig gestaltet sich die Suche nach geeigneten Messmethoden und damit die „Metrisierung“ (d.h. die Überführung von komparativen Begriffe in quantitative mittels geeigneter Messmethoden) in den Sozialwissenschaften. Denn während die verschiedenen Zahlenmengen von den natürlichen Zahlen bis hin zu den komplexen Zahlen geradezu dafür geschaffen scheinen, die Zusammenhänge auszudrücken, die die Naturwissenschaften untersuchen (dazu sehr eindrucksvoll Penrose (Penrose, 2004, S. 51ff.)), weshalb man in diesem Bereich recht eigentlich sagen darf, dass die Mathematik die Sprache der Natur ist, lassen sich mathematische Gesetze für die Sozialwissenschaften vielfach nur unter erheblicher Strapazierung der Begriffe einspannen. Diese Schwierigkeiten begegnen uns auch beim Präferenzbegriff, denn während man die Annahme, dass es ordinale Präferenzen (soll heißen: Präferenzen, die durch ordinale Nutzenfunktionen beschrieben werden können) gibt, noch einigermaßen glaubwürdig rechtfertigen kann, und es zumindest vorstellbar erscheint, die Ordnung von Präferenzen durch Befragung oder Verhaltensbeobachtung halbwegs zuverlässig festzustellen, so ist dies bei der Annahme kardinaler Präferenzen nur unter Schwierigkeiten möglich. Wenn man aber annimmt, dass bei solchen Gegenständen, deren Wert sich durch Geld ausdrücken lässt (also bei „Waren“) der kardinale Nutzen einigermaßen mit dem Geldwert korreliert, dann erscheint die Annahme nicht ganz abwegig, dass es so etwas wie kardinale Präferenzen geben könnte.

Eine weitere Schwierigkeit, die mit der Beantwortung der Frage, welche Art von Skala man zur Nutzenmessung verwenden darf, noch gar nicht berührt ist, ist die ob Nutzenbewertungen immer nur jeweils für eine Person

gültig sind, oder ob man auch die Nutzenwerte unterschiedlicher Personen untereinander vergleichen darf (*intersubjektiver Nutzen*). In Bezug auf solche Güter, deren Wert von den meisten Menschen gleich hoch geachtet wird (z.B. Gesundheit, Leben, Wohlstand, Jugend etc.) erscheint ein intersubjektiver Nutzenvergleich nicht abwegig. Ebenso erscheint ein intersubjektiver Nutzenvergleich bei Gütern möglich, für die soziale Institutionen existieren, die solche Nutzenvergleiche hervorbringen, wie das z.B. Märkte für Waren tun. Bei anderen Gütern mag das nicht immer möglich sein. Mit den beiden Unterscheidungen kardinaler Nutzen - ordinaler Nutzen und subjektiver Nutzen - intersubjektiver Nutzen ergeben sich insgesamt vier Arten von Nutzenkonzepten:

Problem intersubjektiver Nutzenvergleiche

		Skalentyp	
		<i>ordinal</i>	<i>kardinal</i>
Vergleichbarkeit	<i>subjektiv</i>	subjektiver ordinaler Nutzen	subjektiver kardinaler Nutzen
	<i>intersubjektiv</i>	intersubjektiver ordinaler Nutzen	intersubjektiver kardinaler Nutzen

Spiel- und entscheidungstheoretische Modelle kann man danach einteilen, welche Art von Nutzen sie voraussetzen. Die empirische Anwendbarkeit solcher Modelle hängt dann immer davon ab, ob man in einer gegebenen Anwendungssituation das vorausgesetzte Nutzenkonzept rechtfertigen kann oder nicht (was in der Regel wiederum eine Frage des Vorhandenseins zuverlässiger Bestimmungsmethoden der Nutzenwerte des vorausgesetzten Nutzenkonzepts in der gegebenen Anwendungssituation ist).

### 1.3.3 Weitere Entscheidungsregeln auf Basis des kardinalen Nutzens

#### Die Optimismus-Pessimismus Regel

Für die Theorie- und Modellbildung ist der kardinale Nutzen deshalb so vorteilhaft, weil er es erlaubt, in einem gewissen Rahmen mit Nutzenwerten zu rechnen. Mit Hilfe des kardinalen Nutzenbegriffs können wir daher nicht nur endlich guten Gewissens die Minimax-Bedauerns-Regel anwenden, sondern gleich auch eine ganze Reihe weiterer Entscheidungsregeln erfinden. Eine davon ist die „Optimismus-Pessimismus“-Regel. Diese Regel funktioniert folgendermaßen: Zunächst legen wir einen Optimismusindex  $a$  fest, der zwischen 0 und 1 liegen muss. Dann wählen für jede Handlung (also aus jeder *Zeile* der Entscheidungstabelle) das beste und das schlechteste mögliche Ergebnis aus.

Bewertung mit  
Hilfe des Opti-  
mismusindex

Das beste Ergebnis können wir der Einfachheit halber mit  $MAX$  bezeichnen, das schlechteste nennen wir  $min$ . Nun berechnen wir für jede Handlung eine Bewertung  $R_a$  („R“ wie „rating“) nach folgender Formel:

$$R_a = aMAX + (1 - a)min$$

Schließlich wählen wir diejenige Handlung aus, für die  $R_a$  am größten ist. Welche Handlung gewählt wird hängt dabei ganz wesentlich von der Wahl des Optimismusindex  $a$  ab. Aber das ist auch gewollt, denn bei dieser Entscheidungsregel geht es darum zuerst festzulegen, wie „optimistisch“ man sein möchte, und dann auf dieser Grundlage die eigentliche Entscheidung zu treffen. Die beiden Grenzfälle  $a = 0$  und  $a = 1$  entsprechen übrigens haargenau der letzte Woche besprochenen Maximin ( $a = 0$ ) und Maximax-Regel ( $a = 1$ ). Die Anwendung der Regel kann an folgendem Beispiel verdeutlicht werden:

	S1	S2	S3
A1	9	1	2
A2	5	6	3

Für  $a = 0.5$  ergibt sich:

$$R_{A1} = 0.5 \cdot 9 + 0.5 \cdot 1 = 5.0$$

$$R_{A2} = 0.5 \cdot 6 + 0.5 \cdot 3 = 4.5$$

Bei einem Optimismus-Index von 0.5 sollte also die Handlung A1 gewählt werden.

Für  $a = 0.2$  ergibt sich dagegen:

$$R_{A1} = 0.2 \cdot 9 + 0.8 \cdot 1 = 2.6$$

$$R_{A2} = 0.2 \cdot 6 + 0.8 \cdot 3 = 3.6$$

In diesem Fall sollte die Handlung A2 gewählt werden.

Bestimmung  
des Optimis-  
musindex

Die Handlungsempfehlung, die sich aus der Anwendung der Optimismus-Pessimismus-Regel ergibt, hängt wie zu erwarten von der Wahl des Optimismusindex ab. Auch wenn diese Wahl willkürlich ist, stellt sich doch die Frage, ob es ein Verfahren gibt, um die Wahl wenigstens sinnvoll zu treffen, oder anders formuliert: Woher weiss ich eigentlich wie optimistisch ich sein will? Ein Verfahren, das zu Bestimmung des Index vorgeschlagen worden ist, ist dieses (vgl. (Resnik, 2000, S. 33)): Man nehme die folgende einfache Entscheidungstabelle, in welcher in der ersten Zeile die Nutzenwerte 0 und 1 (einer beliebigen kardinalen Nutzenskala) und in der zweiten Zeile in beiden Spalten ein unbekanntes Ergebnis  $x$  eingetragen worden ist:

	S1	S2
A1	0	1
A2	x	x

Dabei soll diesmal die Frage nicht lauten, welche Handlung gewählt werden soll (um ein möglichst gutes Ergebnis zu erzielen), sondern es soll vielmehr schon vorgegeben sein, dass wir zwischen den Handlungen A1 und A2 indifferent sind. Nun müssen wir  $x$  genau so groß wählen, dass wir zwischen A1 und A2 tatsächlich indifferent sind. Haben wir  $x$  entsprechend gewählt, dann können wir daraus den Optimismus-Pessimismusindex ableiten, denn auf Grund der Indifferenz gilt:

$$\begin{aligned}
 R_{A1} &= R_{A2} \\
 a \cdot 1 + (1 - a) \cdot 0 &= a \cdot x + (1 - a) \cdot x \\
 a &= x
 \end{aligned}$$

Was ist damit gewonnen? Wir haben auf diese Weise die Wahl des Optimismusindex aus der Wahl (bzw. Entscheidung im *dezisionistischen* Sinne) über die Indifferenz zwischen zwei Handlungsalternativen abgeleitet. Wenn man annimmt, dass es leichter ist, anzugeben, ob man zwischen zwei Alternativen indifferent ist, als die Frage zu beantworten, wie hoch man den eigenen Optimismus auf einer Skala zwischen 0 und 1 einschätzt, dann vereinfacht das die Wahl des Optimismusindex. Wir hätten dann eine Willkürentscheidung auf eine andere zurückgeführt, die zu treffen uns möglicherweise leichter fällt.

Einwände:

Allerdings wirkt dieses Verfahren etwas gezwungen. Vor allem gibt es einen gravierenden Einwand: Die Frage wie optimistisch oder pessimistisch man entscheiden sollte, oder, was auf dasselbe hinausläuft, wie risikofreudig oder risikoavers man sich verhält, dürfte von den meisten Menschen hochgradig situationsspezifisch beantwortet werden. Insofern erscheint es äußerst fragwürdig, einen Optimismusindex, den man durch ein abstraktes Gedankenexperiment bestimmt hat, auf irgendeine konkrete Entscheidungssituation zu übertragen, der man möglicherweise ein ganz anderes Risikoverhalten zu Grunde legen möchte. Dann kann man sich das Gedankenexperiment besser gleich sparen und willkürlich bleibt die Entscheidung über den Optimismusindex ohnehin.

1. Risikobereitschaft ist situationsspezifisch

Dieses Willkürelement ist noch aus einem anderen Grund als dem der Schwierigkeit der Festlegung des Optimismusindex problematisch: Wenn eine Entscheidungsregel derartige Willkürelemente enthält, dann lädt sie geradezu dazu ein, zuerst die Entscheidung vollkommen intuitiv zu treffen, und sie erst im Nachhinein durch die Wahl eines geeigneten Index zu „rationalisieren“. Das könnte besonders dann problematisch werden, wenn die entscheidungstreffenden Personen anderen für ihre Entscheidung rechenschaftspflichtig sind, denn

2. Nachträgliche „Rationalisierung“ von Entscheidungen

es lässt sich dann nicht mehr nachvollziehen, ob die Entscheidung tatsächlich „verantwortlich“ getroffen wurde.

3.Vernachlässigung mittlerer Optionen Daneben ist die Optimismus-Pessimismus-Regel mit ähnlichen Schwierigkeiten behaftet, wie die Maximin und die Minimax-Bedauerns-Regel. Da sie jeweils nur zwei Werte jeder Zeile in das Kalkül einbezieht, lassen sich leicht Fälle konstruieren, in denen sie unplausibel erscheint:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$\dots$	$S_{99}$	$S_{100}$
$A_1$	2	1	1	$\dots$	1	0
$A_2$	2	0	0	$\dots$	0	0

In diesem Fall würde die Optimismus-Pessimismus-Regel immer zur Indifferenz zwischen beiden Handlungen führen, obwohl intuitiv die Handlung  $A_1$  sicherlich als die bessere beurteilt werden müsste.

Mischungsbedingung Schließlich existiert noch ein weiterer Einwand, der auf einer etwas raffinierteren Konstruktion beruht, nämlich auf der sogenannten „Mischungsbedingung“ (*mixture-condition*), die – leicht vereinfacht – besagt: Wenn eine Person indifferent zwischen zwei Handlungsalternativen ist, dann ist sie auch indifferent zwischen diesen beiden Handlungen und einer dritten Handlung, die darin besteht, eine Münze zu werfen und bei „Kopf“ die erste Handlung und bei „Zahl“ die zweite Handlung zu wählen. Betrachten wir die folgende Tabelle:

	$S_1$	$S_2$
$A_1$	0	1
$A_2$	1	0

Nach der Optimismus-Pessimismus-Regel herrscht zwischen beiden Handlungsalternativen völlige Indifferenz, und zwar unabhängig von der Wahl des Optimismusindex  $\alpha$ . Fügt man nun die Münzwurfalternative hinzu, dann ergibt sich folgende Entscheidungstabelle:<sup>15</sup>

	$S_1$	$S_2$
$A_1$	0	1
$A_2$	1	0
$A_3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

<sup>15</sup>Bei der Nutzenbewertung der Ergebnisse der Münzwurfhandlung wurde implizit bereits die *Erwartungsnutzenhypothese* zugrunde gelegt, die besagt, dass der Erwartungsnutzen gleich dem erwarteten Nutzen multipliziert mit der Eintrittswahrscheinlichkeit ist. Strenggenommen kann auch das Ergebnis der Münzwurfhandlung nur 0 oder 1 sein.



Angenommen der Optimismus-Pessimismus-Index wäre  $a = \frac{2}{3}$ . Dann ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} R_{A1} &= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 = 2/3 \\ R_{A2} &= \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 = 2/3 \\ R_{A3} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. Verletzung  
der  
„Mischungs-  
bedingung“

Nach der Optimismus-Pessimismus-Regel müssten die Handlungen A1 und A2 der „Münzwurfallalternative“ vorgezogen werden, unter Verletzung der Mischungsbedingung. Die Mischungsbedingung lässt sich nur erfüllen, wenn das beste und das schlechteste mögliche Ergebnis genau gleich gewichtet werden, d.h. bei einem Optimismusindex von  $a = \frac{1}{2}$ .

Einwände  
gegen die  
Mischungsbe-  
dingung

Wie auch bei den denkbaren Einwänden gegen die anderen Entscheidungsregeln, lässt sich darüber streiten, ob die Verletzung der „Mischungsbedingung“ ein Nachteil oder, eher im Gegenteil, eine besondere Eigenschaft der Optimismus-Pessimismus-Regel ist. („It's not a bug, it's a feature!“) Wenn jemand optimistisch ist, dann besagt das ja gerade, dass die Person eher geneigt ist, an den Erfolg zu glauben als an eine 50:50 Chance von Erfolg und Misserfolg, so dass es nicht verwunderlich ist, dass sie eine Handlung, an deren Erfolg sie glaubt, einem Münzwurf vorzieht, von dem sie weiß, dass die Chancen gleichverteilt sind. Widersprüchlich wäre das optimistische (oder pessimistische) Verhalten bei der gegebenen Entscheidungstabelle aber immer noch insofern, als die Person eigentlich nur *entweder* an den mehr als 50%-igen Erfolg von S1 *oder* von S2 glauben dürfte, aber – sofern die Zustände S1 und S2 von den Handlungen unabhängig sind – nicht daran, dass sie in jedem Fall die höheren Erfolgchancen hat.

### Das Prinzip der Indifferenz

Wenn wir die Nutzenwerte als kardinale Nutzenwerte interpretieren und daher mit ihnen rechnen dürfen, wie das bei der Optimismus-Pessimismus-Regel der Fall ist, dann besteht eine der naheliegendsten Arten, die unterschiedlichen Handlungsalternativen in eine Rangordnung zu überführen, darin, einfach alle Zahlen in jeder Zeile aufzusummieren und die Handlungsalternative mit der höchsten Zeilensumme zu wählen. An einem Beispiel betrachtet sieht das Verfahren folgendermaßen aus:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$\Sigma$
$A_1$	8	2	-7	3	3	9
$A_2$	-5	-3	5	12	4	13

In diesem Fall würde also die Handlung A2 gewählt werden, weil die Summe der erzielbaren Nutzenwerte größer ist als bei der Handlung A1. Werden

Prinzip der  
Indifferenz

die Nutzenwerte einer Zeile einfach aufsummiert, dann bedeutet das, dass sie alle gleich gewichtet werden. Dem Summierungsverfahren liegt damit implizit ein Prinzip zu Grunde, das man auch als das *Prinzip der Indifferenz* bezeichnet. Es besagt, dass wir alle Ereignisse als gleichwahrscheinlich betrachten sollten, solange wir nicht wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit eines von mehreren Ereignissen eintreten wird.<sup>16</sup>

In diesem Zusammenhang ist noch einmal darauf hinzuweisen, dass ein subtiler Unterschied zwischen dem vom „Prinzip der Indifferenz“ erfassten Fall besteht, in dem wir nicht wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Ereignis eintritt („*Unwissen*“), und dem vergleichsweise „harmloseren“ Fall, in dem wir bloß nicht wissen, welches Ereignis eintritt, aber über die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse auf Grund unserer Kenntnis des empirischen Vorgangs, um den es geht, genaue Aussagen machen können („*Risiko*“). Beim Würfeln oder bei einem Münzwurf etwa wissen wir auf Grund unserer Kenntnis von Würfeln und Münzen, dass die verschiedenen möglichen Ereignisse gleichverteilt sind. Die Rechtfertigung dafür, dass wir beim Würfeln oder auch beim Werfen einer Münze von einer Gleichverteilung ausgehen, ergibt sich aus dieser Kenntnis. Dem Prinzip der Indifferenz liegt keine vergleichbare Rechtfertigung zu Grunde. Es handelt sich um ein philosophisches oder, wenn man so will, sogar *metaphysisches Postulat*, dessen Annahme keinesfalls zwingend ist (wohingegen die Annahme der Gleichverteilung von Würfelergebnissen oder Münzwürfen genauso zwingend ist, wie andere Aspekte der alltäglichen physischen Wirklichkeit, wie etwa, dass „morgens die Sonne aufgeht“, dass „dort eine Wand steht“ etc.).

Die auf dem Prinzip der Indifferenz beruhende Entscheidungsregel hat die Eigenschaft (wenn man so will: den Vorzug), dass sie sowohl die *Mischungsbedingung* erfüllt als auch *Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen* garantiert und selbstverständlich weiterhin *dominierte Alternativen* ausschließt.

---

<sup>16</sup>In der Fachliteratur wird statt vom „Prinzip der Indifferenz“ zuweilen auch vom „Prinzip des (un-)zureichenden Grundes“ gesprochen (Resnik, 2000, S. 35ff). Beim „Prinzip des (un-)zureichenden Grundes“ handelt es sich aber um einen allgemeineren philosophischen Gedanken, der in der Philosophiegeschichte immer wieder in unterschiedlichen Ausprägungen und Formulierungen aufgetreten ist. In der einfachsten Form besagt es, dass nichts ohne Ursache geschieht. Man kann es auch so auffassen, dass in einer Reihe von gleichartigen Ereignissen keine Ausnahmen auftreten können, ohne dass es dafür einen zureichenden Grund gibt, d.h. der Ausnahmefall muss sich in irgendeiner qualitativen Hinsicht von den anderen Fällen unterscheiden. Das Prinzip des unzureichenden Grundes ist ein *heuristischer Grundsatz* (ein Hilfsmittel unserer Erkenntnis). Ontologische, d.h. die Natur der Gegenstände selbst bzw. das Wesen des Seins betreffende Bedeutung kommt ihm wenn überhaupt nur in einem deterministischen Universum zu (Vgl. (Schurz, 2006, S. 130)). Das hier besprochene „Prinzip der Indifferenz“ kann man vage auf das Prinzip des (un-)zureichenden Grundes zurückführen.

Trotzdem wird man in bestimmten Situation, z.B. in Situationen, in denen es vor allem darum geht, Schaden zu begrenzen, auf andere Entscheidungsregeln wie die Maximin-Regel zurückgreifen. Unter „Unwissen“ gibt es viele je nach Situation mehr oder weniger gute Entscheidungsregeln, aber keine eindeutig beste Regel.

### Paradoxien des Indifferenzprinzips

Einwände gegen das Indifferenzprinzip werden häufig daraus abgeleitet, dass sich bei der Anwendung des Prinzips unter bestimmten Bedingungen Paradoxien ergeben. Was es damit auf sich hat, und ob diese Paradoxien ein Problem bei der Anwendung des Indifferenzprinzips bei den hier besprochenen Entscheidungen unter Unwissenheit darstellen, soll nun kurz erörtert werden.<sup>17</sup> Um diese Paradoxien zu erläutern, muss schon ein wenig auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung vorgegriffen werden (Kapitel 3.1). Es genügt allerdings zu wissen, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses immer eine reelle Zahl von 0 bis 1 ist, und dass sich die Wahrscheinlichkeiten einer Reihe von Alternativen, die einander ausschließen, von denen aber irgendeine auf jeden Fall eintreten muss, zu 1 aufaddieren, und dass man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses üblicherweise mit  $P(\text{Ereignis})$  darstellt.

*Buch-Paradox:* Das erste Paradoxon entsteht folgendermaßen: In der Uni-Bibliothek steht eine Ausgabe von Schopenhauers „Die Welt als Wille und Vorstellung“. Wenn jemand noch nicht in der Bibliothek war, dann weiß sie oder er nicht, ob das Buch einen blauen oder keinen blauen Umschlag hat. Nach dem Indifferenzprinzip müsste die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Buch einen blauen Umschlag hat  $P(\text{blau})$  also  $1/2$  betragen. Aber mit genau demselben Argument kann gefolgert werden, dass  $P(\text{rot})$ ,  $P(\text{gelb})$ ,  $P(\text{lila})$  etc. alle den Wert  $1/2$  haben. Damit haben wir eine Reihe von sich wechselseitig ausschließenden Alternativen, deren Wahrscheinlichkeiten sich auf eine Zahl größer 1 aufaddieren, was wiederum der Definition der Wahrscheinlichkeit widerspricht (Gillies, 2000, S. 37f.).

Buch-Paradox

Wie könnte man das Paradox lösen? Denkbar wäre folgender Lösungsansatz: Wahrscheinlichkeiten dürfen nur unteilbaren *Elementar*-ereignissen

<sup>17</sup>Neuerlich hat Rudolfo Cristofaro den Anspruch erhoben, das Indifferenzprinzip in einer Form gefasst zu haben, in der keine Paradoxien mehr entstehen (de Cristofaro, 2008). Er geht nicht unmittelbar darauf ein, wie mit seiner Neuformulierung des Prinzips die Paradoxien umgangen werden. Seine Ausführungen legen die Vermutung nahe, dass dies nur dadurch ermöglicht wird, dass er verlangt, dass die Informationen über das „experimentelle Design“ mit in die Situationsbeschreibung einfließen müssen. Eine rein logische Rechtfertigung des Indifferenzprinzips wäre damit nicht gegeben. Seine Lösung ginge dann – bis evtl. auf die allgemeinere Formulierung – nicht fundamental über bestehende Lösungen hinaus.

zugewiesen werden. Soll heißen: Bevor man das Prinzip der Indifferenz anwendet ist zunächst sicherzustellen, dass sämtliche Ereignisse, auf die man es anwendet (vorbehaltlich unseres Wissens darüber) unteilbare Elementarereignisse sind. Im Fall des Buch-Paradoxons ist das Ereignis „nicht blau“ offenbar kein Elementarereignis, da wir wissen, dass noch andere Farben in Frage kommen. Nun stellt sich aber das weitere Problem, dass wir gar nicht wissen, wie viele andere Farben in Frage kommen. Der Lösungsansatz beinhaltet also, dass wir das Indifferenzprinzip überhaupt nur dann anwenden können, wenn wir zumindest die Menge der Elementarereignisse kennen. Ist das aber der Fall, so hilft uns das Indifferenzprinzip immerhin noch dabei, diesen Elementarereignissen in sinnvoller Weise Wahrscheinlichkeiten zuzuweisen, wenn uns deren objektive Wahrscheinlichkeiten unbekannt sind.

Wasser-Wein-  
Paradox

*Wasser-Wein-Paradox:* Leider funktioniert dieser Lösungsansatz nicht mehr bei den sogenannten „geometrischen Wahrscheinlichkeiten“, bei denen wir es statt mit diskreten (d.h. zählbaren) mit kontinuierlichen Größen zu tun haben, wie uns das Wasser-Wein-Paradox vor Augen führt. Bei diesem Paradox geht es um Folgendes (Howson, 2000, p. 84): Angenommen wir haben eine Mischung von Wasser und Wein, von der wir wissen, dass das Verhältnis von Wasser zu Wein bei dieser Mischung irgendwo zwischen „halbe-halbe“ und „doppelt soviel Wasser wie Wein“ liegt. Die unbekannte Menge des Wassers  $x$  liegt bezogen auf die gegebene Menge von Wein also irgendwo zwischen 1 und 2 (die Grenzen eingeschlossen). Und umgekehrt liegt der Mengenanteil des Weins  $w$  im Verhältnis zum Wasser irgendwo zwischen  $\frac{1}{2}$  und 1. Nach dem Indifferenzprinzip sollte die Wahrscheinlichkeit, dass die Wassermenge  $x$  zwischen 1 und  $\frac{3}{2}$  liegt, sicherlich genauso groß sein, wie die Wahrscheinlichkeit, dass sie zwischen  $\frac{3}{2}$  und 2 liegt, also jeweils  $1/2$ . Da der Weinanteil genau im umgekehrten Verhältnis zum Wasseranteil steht, also  $w = 1/x$ , so ergibt sich daraus, dass die Wahrscheinlichkeit, dass  $w$  zwischen  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{2}{3}$  bzw. zwischen  $\frac{2}{3}$  und 1 liegt, ebenfalls jeweils  $1/2$  betragen muss. Das ist aber mit dem Prinzip der Indifferenz unvereinbar, das ja fordert, dass die Wahrscheinlichkeit für gleich große Intervalle gleich groß sein muss.

Die Lösung dieses Paradoxons ist deshalb schwieriger als die des Buch-Paradoxons, weil die beiden Größen, die hier involviert sind, die relative Menge des Wassers  $x$  und die relative Menge des Weins  $w$  sich anders als „blau“ und „nicht blau“ vollkommen symmetrisch verhalten. Trotzdem ist eine Lösung denkbar, indem man die relativen Mengenangaben durch absolute Mengenangaben ersetzt. Beziehen wir die Wein- und die Wassermenge auf eine konstante Grundmenge von 6 Mengeneinheiten, dann liegt die Weinmenge zwischen 2 und 3 Mengeneinheiten und die Wassermenge zwischen 3 und 4 Mengeneinheiten. Die Schwankungsbreite betrifft dann sowohl für Wein als auch für Wasser ein Intervall von genau einer Mengeneinheit, so dass die

Anwendung des Indifferenzprinzips wahlweise auf Wein oder auf Wasser zu keinen Widersprüchen mehr führen kann.

Diese Lösung des Paradoxons setzt allerdings ebenso wie die vorhergehende ein ontologisches Wissen über die Situation voraus, in der wir das Indifferenzprinzip anwenden. Dieses Wissen geht über die bloße Kenntnis der Anzahl der involvierten Parameter (zwei, nämlich  $x$  und  $w$ ), ihres möglichen Wertebereichs ( $[1, 2]$ ,  $[\frac{1}{2}, 1]$ ) und ihrer wechselseitigen Beziehung  $w = 1/x$  hinaus. Insofern ist die gefundene Lösung nicht mathematisch verallgemeinerbar. Wenn wir nur die rein mathematischen Beziehungen zwischen den beteiligten Größen betrachten, dann stehen wir – etwas vereinfacht betrachtet – vor dem Problem, dass wir das Prinzip der Indifferenz nicht gleichzeitig auf das Intervall  $[a, b]$  anwenden können (indem wir gleichgroßen Teilintervallen gleichgroße Wahrscheinlichkeiten zuweisen) und auf das Intervall  $[\frac{1}{a}, \frac{1}{b}]$ . Haben wir das Prinzip der Indifferenz schon auf das erste Intervall angewendet, dann haben wir automatisch eine Entscheidung damit getroffen, es nicht auf das zweite Intervall anzuwenden und umgekehrt. Rein mathematisch betrachtet, können wir aber gar nicht unterscheiden, ob  $a$  und  $b$  oder ob  $\frac{1}{a}$  und  $\frac{1}{b}$  die Basisgrößen sind, von denen wir auszugehen haben.<sup>18</sup> Und auch empirische Größen bieten dafür nicht zwangsläufig hinreichende Anhaltspunkte. Man denke etwa an Lichtwellen, die wir durch ihre Wellenlänge  $\lambda$  oder ihre Frequenz  $f$  angeben können, wobei beide in dem Verhältnis  $\lambda = 1/f$  zueinander stehen, ohne dass man eine der beiden Angaben in irgendeiner Weise als privilegiert auszeichnen könnte. Das bedeutet aber, dass wir das Indifferenzprinzip ohne die Gefahr eines Paradoxons nur heranziehen können, wenn die Anwendungssituation das zulässt und wir über ein ausreichendes Hintergrundwissen darüber verfügen. Bei völligem Unwissen hilft es nicht weiter.

Inwiefern sind die hier besprochenen Paradoxien ein Problem für die Anwendung des Indifferenzprinzips auf Entscheidungen unter Unwissenheit? Hier sind zwei Situationen zu unterscheiden:

Anwendbarkeit  
des Indifferenz-  
prinzips

1. Wir verfügen über ein hinreichendes Hintergrundwissen der Situation, dass es uns erlaubt, das Indifferenzprinzip eindeutig auf die Situation anzuwenden. (Z.B. müssten wir beim Buch-Paradoxon die Menge der in Frage kommenden Farben kennen.) Dann dürfen wir das Indifferenzprinzip anwenden, sollten uns aber bewusst sein, dass die Annahme

<sup>18</sup>Man kann das Problem nicht durch den Vorschlag lösen, dass man die Entscheidung zwischen den beiden Alternativen  $[a, b]$  und  $[1/a, 1/b]$  mangels besserem Wissen nach belieben treffen darf, denn da statt  $1/x$  jede beliebige mathematische Transformation stehen könnte, hieße dies, dass man bezüglich der Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $[a, b]$  jede beliebige Wahl treffen darf, was aber gerade das Gegenteil dessen ist, was mit dem Prinzip der Indifferenz beabsichtigt wird!

jeder anderen Wahrscheinlichkeitsverteilung als der Gleichverteilung genauso legitim wäre. Aber wir könnten wenigstens sicher sein, dass die Anwendung dieses Prinzips nicht zu Entscheidungsempfehlungen führt, die sich in kontingenter Weise wandeln, wenn wir die Zustandsbeschreibungen durch äquivalente andere Zustandsbeschreibungen austauschen.

2. Wir verfügen nicht über ein entsprechendes Hintergrundwissen. Dann können wir das Prinzip nicht anwenden, denn es liefert für dieselbe Entscheidungssituation widersprechende Empfehlungen.

### 1.3.4 Aufgaben

1. Welche der folgenden Transformationen sind *ordinale* und welche *positive lineare* Transformationen (und welche keins von beiden)? (Es sei angenommen, dass  $x$  eine beliebige reelle Zahl sein kann):
  - (a)  $t(x) = x - 5$
  - (b)  $t(x) = x^2$
  - (c)  $t(x) = x^3$
  - (d)  $t(x) = 3x + 5 - 4x$
2. Quizfrage: Ist die Fahrenheitskala zur Messung der Temperatur eine Intervallskala oder eine Verhältnisskala?
3. Kann es bei Verwendung der Optimismus-Pessimismus-Regel dazu kommen, dass dominierte Handlungen gewählt werden?
4. Die Optimismus-Pessimismus-Regel hat die Schwäche, dass immer nur zwei Einträge jeder Zeile (das Maximum und das Minimum) der Entscheidungstabelle berücksichtigt werden. Denken Sie sich eine Verbesserung der Optimismus-Pessimismus-Regel aus, die alle Einträge einer Zeile berücksichtigt.
5. Zeige, dass das Prinzip des unzureichenden Grundes niemals eine dominierte Handlungsalternative empfiehlt.
6. Erkläre (möglichst anhand eines Beispiels), warum das Prinzip der Indifferenz den kardinalen Nutzen voraussetzt.
7. Bei zwei Münzwürfen gibt es drei Möglichkeiten: a) 2-mal Kopf b) 1-mal Kopf und 1-mal Zahl c) 2-mal Zahl. Jemand schließt daraus, dass man nach dem *Prinzip der Indifferenz* jeder dieser Möglichkeiten die Wahrscheinlichkeit  $1/3$  zuweisen muss. Warum ist das falsch und was sind die richtigen Wahrscheinlichkeiten?
8. Worin unterscheiden sich die Beispiele für die mögliche Relevanz dritter Alternativen auf Seite 43? Weshalb ist in den unterschiedlichen Beispielen die dritte Alternative jeweils „relevant“? Lassen sich einzelne der Beispiele durch eine entsprechende Interpretation der Ausgangssituation (sprich „Problemspezifikation“) doch noch so mit der Theorie vereinbaren, dass das Prinzip der Unabhängigkeit von dritten Alternativen nicht verletzt werden müsste.

**schwierigere Aufgaben**

9. Zeige: Wenn man eine Entscheidungstabelle positiv linear in eine andere überführt, dann ist auch die zugehörige Bedauernstabelle eine positiv linear transformierte (genaugenommen sogar ein positives Vielfaches, warum?) der ursprünglichen Bedauernstabelle. (Was müsste man von der Minimax-Bedauernsregel halten, wenn das nicht der Fall wäre?)
10. Zeige: Positiv lineare Transformationen sind transitiv, d.h. wenn die Skala  $u'$  durch positiv lineare Transformation aus der Skala  $u$  hervorgeht und Skala  $u'$  durch eine (nicht notwendigerweise dieselbe) positiv lineare Transformation in  $u''$  überführt werden kann, dann kann gibt es auch eine positiv lineare Transformation, die  $u$  unmittelbar in  $u''$  überführt. Warum ist diese Eigenschaft wichtig?



## 1.4 Entscheidungen unter Risiko

Bisher haben wir nur über Entscheidungen unter Unwissenheit gesprochen. Damit sind solche Entscheidungen gemeint, bei denen wir die Menge der möglichen Ereignisse, die – unabhängig von unserer Wahl – auf das Ergebnis Einfluss nehmen können, genau kennen, bei denen wir aber nicht wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit jedes der Ereignisse eintreten wird. In diesem Kapitel werden wir die Techniken des Umgangs mit „Entscheidungen unter Risiko“ kennen lernen, wobei mit Entscheidungen unter Risiko genau solche Entscheidungen gemeint sind, bei denen wir die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Ereignisse (oder der Gegebenheit bestimmter Zustände kennen). Bei Entscheidungen unter Risiko verfügen wir also über mehr Informationen als bei Entscheidungen unter Unwissenheit. In diesem Sinne ist Risiko (so wie der Begriff innerhalb der Entscheidungstheorie verstanden wird) günstiger als Unwissenheit.

Da wir bei Entscheidungen unter Risiko Wahrscheinlichkeiten voraussetzen, müsste, wollte man nach der logischen Reihenfolge vorgehen, eigentlich zuvor der mathematische Wahrscheinlichkeitsbegriff eingeführt werden. Weil die Wahrscheinlichkeitstheorie aber eine komplizierte Sache ist, wird die Wahrscheinlichkeitstheorie aus didaktischen Gründen erst später besprochen. Bis dahin genügt es, über Wahrscheinlichkeiten lediglich das folgende zu wissen:

1. Jede Wahrscheinlichkeit  $p$  ist eine Zahl von 0 bis 1, also  $0 \leq p \leq 1$ . Eine Wahrscheinlichkeit von 0 bedeutet, dass ein Ereignis „praktisch unmöglich“ ist, eine Wahrscheinlichkeit von 1, dass es „praktisch sicher“ ist.
2. Die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen, die sich ausschließen kann man addieren und man erhält dabei die Wahrscheinlichkeit, dass das eine *oder* das andere Ereignis eintritt. Also, seien  $E$  und  $F$  zwei Ereignisse, die sich wechselseitig ausschließen, dann gilt  $P(E) + P(F) = P(E \vee F)$ .
3. Bei einer Menge von einander sich wechselseitig ausschließenden (*paarweise disjunkten*) Ereignissen, von denen aber irgendeins auf jeden Fall eintritt (*erschöpfende Ereignismenge*) addieren sich die Wahrscheinlichkeiten zu 1 auf.

### 1.4.1 Die Berechnung des Erwartungsnutzens

Um unter Risiko eine begründete Entscheidung treffen zu können, müssen wir den Nutzen unsicherer Ereignisse in irgendeiner Weise bewerten, so dass die Unsicherheit bzw. das Risiko bei der Bewertung mit einbezogen wird. Dieser Nutzenwert, in den die Unsicherheit schon mit eingerechnet ist, wird der *Erwartungsnutzen* genannt. Da im Erwartungsnutzen der Nutzen eines Ereignisses mit dem Wert des Ereignisses, wenn es eintritt, verrechnet wird, setzt die Bestimmung des Erwartungsnutzens immer ein kardinales Nutzenkonzept voraus.

Das zentrale Gesetz des Erwartungsnutzens ist die sogenannte Erwartungsnutzenhypothese. Sie besagt, dass der Erwartungsnutzen eines unsicheren Ereignisses gleich dem erwarteten Nutzen multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses ist. Unter dem „Erwartungsnutzen“ ist dabei der Nutzen des noch *unsicheren* Ereignisses zu verstehen. Während mit dem „erwarteten Nutzen“ der Nutzen des Ereignisses (für einen bestimmten Akteur) gemeint ist, wenn das Ereignis eingetreten ist, „Erwartungsnutzen“ und „erwarteter Nutzen“ dürfen also nicht verwechselt werden! Der Zusammenhang kann also mathematisch folgendermaßen formuliert werden:

Erwartungs-  
nutzen

$$EU = p \cdot U$$

EU Erwartungsnutzen eines bestimmten Ereignisses  
 p Wahrscheinlichkeit des Eintretens dieses Ereignisses  
 U Nutzen des eingetretenen Ereignisses („erwarteter Nutzen“)

Wird der Zusammenhang so wie in der Gleichung oben ausgedrückt, dann wird dabei stillschweigend vorausgesetzt, dass der erwartete Nutzen, wenn das Ereignis nicht eintritt, Null beträgt. In etwas präziserer und allgemeinerer Form müsste man den Zusammenhang so darstellen:

Sei  $e_1, \dots, e_n$  eine *Partition* von Ereignissen, d.h. eine Menge von Ereignissen, die sich wechselseitig ausschließen, von denen eins aber eintreten muss. Seien weiterhin die Wahrscheinlichkeiten, mit denen diese Ereignisse eintreten können:  $p_1, \dots, p_n$  und ihre erwarteten Nutzenwerte  $U_1, \dots, U_n$ . Dann berechnet sich der Erwartungsnutzen nach:

$$EU = p_1 \cdot U_1 + p_2 \cdot U_2 + \dots + p_n \cdot U_n$$

Die Berechnung des Erwartungsnutzens hat aber offensichtlich nur dann Sinn, wenn wir eine *kardinale Nutzenfunktion* (siehe Kapitel 1.3.2) voraussetzen dürfen, da der so berechnete Erwartungsnutzen nicht bei jeder positiven Transformation der gewählten Nutzenfunktion derselbe bleibt. Sie ist

aber insbesondere dann unproblematisch, wenn es sich bei dem Nutzen um Geldwerte handelt. Dass unter der Voraussetzung kardinaler Nutzenwerte die Verwendung des Erwartungsnutzens zur Bewertung unterschiedlicher Handlungsalternativen unbedenklich ist, ergibt sich daraus, dass der Erwartungsnutzen von positiv linear transformierten Nutzenwerten gleich dem positiv linear transformierten Erwartungsnutzen der Nutzenwerte ist. Mathematisch gesprochen: Seien  $u$  und  $v$  zwei äquivalente kardinale Nutzenskalen, d.h. es gelte:  $v = au + b$  mit  $a > 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 EV &= p_1 \cdot V_1 + \dots + p_n \cdot V_n \\
 &= p_1 \cdot (aU_1 + b) + \dots + p_n \cdot (aU_n + b) \\
 &= ap_1 \cdot U_1 + \dots + ap_n \cdot U_n + \sum_{i=1}^n p_i b \\
 &= a(p_1 \cdot U_1 + \dots + p_n \cdot U_n) + b \\
 &= aEU + b
 \end{aligned}$$

*Hinweis:* Da  $p_1 + \dots + p_n = 1$  (es handelt sich um eine Partition von Ereignissen, d.h. die Ereignisse schließen sich wechselseitig aus und ein Ereignis tritt auf jeden Fall ein), durften wir im vorletzten Schritt  $\sum_{i=1}^n p_i b = b \cdot \sum_{i=1}^n p_i = b \cdot 1 = b$  verwenden.

Bewertet man den Wert unterschiedlicher Handlungsalternativen einer Entscheidung unter Risiko (d.i. einer Entscheidung, bei der die Eintrittswahrscheinlichkeiten der möglichen Zufallsereignisse bekannt sind) mit Hilfe des Erwartungsnutzens, so ist damit sichergestellt, dass die Rangfolge der Alternativen dieselbe bleibt, wenn wir unsere Nutzenfunktion durch eine äquivalente kardinale Nutzenfunktion ersetzen.

Aus dem Erwartungsnutzen ergibt sich eine sehr einfache Entscheidungsregel für Entscheidungen unter Risiko, sofern die erwarteten Werte mindestens auf einer kardinalen Nutzenskala eingetragen werden können, nämlich die Regel:

*Entscheidungsregel für Entscheidungen unter Risiko:* Wähle diejenige Entscheidung, bei der der Erwartungsnutzen am größten ist.

Entscheidungs-  
regel unter  
Risiko

Dass diese Regel bei Entscheidungen unter Risiko tatsächlich die beste ist, werden wir gleich noch ausführlicher begründen. Wenn sie aber die beste ist, dann ergibt sich für Entscheidungen unter Risiko, dass wir nicht – wie bei Entscheidungen unter Unwissenheit – mit dem Problem zu kämpfen haben, dass es eine Reihe unterschiedlicher Entscheidungsregeln gibt, die alle

sinnvoll begründet werden können, die aber unter Umständen unterschiedliche Ergebnisse liefern. (Inwiefern dies ein ernstzunehmendes Problem ist, sei dahin gestellt. Man könnte es auch so interpretieren, dass es bei Entscheidungen unter Unwissenheit eben keine generell beste Entscheidungsregel gibt, sondern nur situationsspezifisch mehr oder weniger angemessene Entscheidungsregeln – wobei einmal angenommen sei, dass die Auswahl der richtigen Entscheidungsregel unter Berücksichtigung der näheren situationspezifischen Bedingungen und Umstände leichter fällt.)

### Beispiele

Wie kann man mit Hilfe dieser Entscheidungsregel Entscheidungen unter Risiko treffen? Dazu ein Beispiel. Eine Computerfirma hat erfahren, dass die Konkurrenz dabei ist, eine neue Art von sehr preiswerten Kleinstlaptops zu entwickeln. Sie steht nun vor der Wahl, ob sie ebenfalls in die Entwicklung derartiger Laptops investieren soll. Es steht nicht fest, ob diese Art Laptops vom Markt akzeptiert wird. Auch hängt der zu erwartende Gewinn davon ab, ob es der Konkurrenz gelingt, noch in diesem Jahr ihr Produkt auf den Markt zu werfen, in welchem Fall man die Eigenentwicklung zu einem deutlich niedrigeren Preis mit entsprechend reduzierten Gewinnerwartungen anbieten müsste. Andererseits ist zu erwarten, dass eine erfolgreiche Konkurrenz durch Kleinstlaptops die Firma auch Marktanteile in ihren Kernbereichen kosten könnte. Daraus ergibt sich folgendes Entscheidungsproblem:

Handlungs-  
unabhängige  
Wahrschein-  
lichkeiten

	$S_1$ ( $p = 0.3$ )	$S_2$ ( $p = 0.2$ )	$S_3$ ( $p = 0.5$ )	
$A_1$	-100.000 €	-50.000	€ 60.000	$EU = -10.000$ €
$A_2$	0 €	-80.000	€ 0	$EU = -16.000$ €

$A_1$ :

Investiere in die rasche Entwicklung eines Kleinstlaptops.

$A_2$ :

Investiere nicht in die Entwicklung eines Kleinstlaptops.

$S_1$ :

Kleinstlaptops bleiben auf dem Markt erfolglos.

$S_2$ :

Kleinstlaptops sind erfolgreich, aber die Konkurrenz ist ebenfalls frühzeitig auf dem Markt präsent.

$S_3$ :

Kleinstlaptops sind erfolgreich, aber die Entwicklung der Konkurrenz verzögert sich.

Der Erwartungsnutzen der jeweiligen Handlungen wurde dabei folgendermaßen errechnet:

$$\begin{aligned}
 EU_{A_1} &= -100.000 \cdot 0.3 - 50.000 \cdot 0.2 + 60.000 \cdot 0.5 = -10.000 \\
 EU_{A_2} &= 0 \cdot 0.3 - 80.000 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.5 = -16.000
 \end{aligned}$$

Wie man an dem berechneten Erwartungsnutzen sieht, lohnt sich die Investition in die Entwicklung eines Kleinstlaptops, obwohl auch in diesem Fall ein Verlust zu erwarten ist. Es kann Entscheidungsprobleme geben, bei denen nicht nur die Nutzenwerte, sondern auch die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Ereignis eintritt, davon abhängt, welche Handlungsalternative man wählt. In diesem Fall müssen die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ereignisse in jeder Zeile separat mit angegeben werden. Für die Berechnung des Erwartungsnutzens müssen dann natürlich die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Zeile herangezogen werden. Ein Beispiel: Ein großes Softwareunternehmen möchte im Laufe der nächsten Monate ein kleines Softwareunternehmen aufkaufen. Es besteht die Möglichkeit, dass der Aktienkurs des Kleinunternehmens in den folgenden Monaten sinkt, steigt oder gleich bleibt, worüber die Experten des Großunternehmens relativ zuverlässige Schätzungen abgeben können. Das Großunternehmen kann seine Kaufabsicht vorher ankündigen oder auch nicht. Kündigt es die Kaufabsicht vorher an, so erhöht das die Wahrscheinlichkeit, dass der Aktienkurs und damit der Preis des Kleinunternehmens steigt. Zugleich führt dies aber dazu, dass das Kleinunternehmen, das bisher ein direkter Konkurrent des Großunternehmens ist, bis zum Verkauf kaum noch Lizenzen absetzen kann, woraus sich in diesem Fall ein fixer Gewinn für das Großunternehmen ergibt. Das Entscheidungsproblem sieht als Tabelle folgendermaßen aus (Die eingetragenen Werte repräsentieren dabei die Gesamtkosten, die sich aus dem zu erwartenden Kaufpreis minus dem fixen Gewinn aus zusätzlichen Lizenzverkäufen nach Wegfall einer effektiven Konkurrenz infolge der Ankündigung ergeben):

	Kurs steigt	Kurs fällt	bleibt gleich	EU	Handlungs- abhängige Wahrschein- lichkeiten
$A_1$ :	5 Mio € <small>(p=0.1)</small>	2 Mio € <small>(p=0.6)</small>	4 Mio € <small>(p=0.3)</small>	2.9 Mio €	
$A_2$ :	4.5 Mio € <small>(p=0.7)</small>	1.5 Mio € <small>(p=0.1)</small>	3.5 Mio € <small>(p=0.2)</small>	4 Mio €	
$A_1$	Kündige die Akquise <i>nicht</i> vorher an.				
$A_2$	Kündige die Akquise vorher an.				

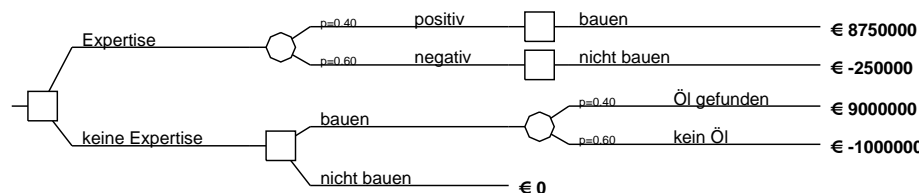
Dies mal sieht die Berechnung des Erwartungsnutzens folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
 EU_{A_1} &= 5.000.000 \cdot 0.1 + 2.000.000 \cdot 0.6 + 4.000.000 \cdot 0.3 = 2.900.000 \\
 EU_{A_2} &= 4.500.000 \cdot 0.7 + 1.500.000 \cdot 0.1 + 3.500.000 \cdot 0.2 = 4.000.000
 \end{aligned}$$

Da es sich bei den eingetragenen Werten um Kosten handelt, sollte das Unternehmen tunlichst vermeiden, die Akquiseabsichten vorher anzukündigen.

Schließlich wollen wir noch an einem Beispiel betrachten, wie man den Erwartungsnutzen einsetzt, um Entscheidungsbäume aufzulösen. Eine Ölfirma

erwägt an einer bestimmten Stelle in der Nordsee nach Öl zu bohren. Es ist nicht absolut sicher, ob sich an dem entsprechenden Ort tatsächlich Öl befindet. Um dies mit Sicherheit festzustellen, kann die Firma eine Probebohrung durchführen lassen. Der Bau einer Bohrinself kostet € 1.000.000. Liefert die Bohrinself tatsächlich Öl, so erwirtschaftet die Ölfirma mit dem geförderten Öl € 10.000.000. Die Durchführung einer Expertise mit Hilfe einer Probebohrung kostet € 250.000. Wir gehen der Einfachheit halber davon aus, dass die Probebohrung absolut zuverlässig darüber Auskunft gibt, ob Öl vorhanden ist. Weiterhin sei angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Öl vorhanden ist 40% beträgt. Um einen entsprechenden Entscheidungsbaum für Entscheidungen unter Risiko zu zeichnen, werden die Wahrscheinlichkeiten für Zufallsereignisse jeweils auf den entsprechenden Zweigen nach dem Ereignisknoten eingetragen. Der Entscheidungsbaum sieht dann folgendermaßen aus:

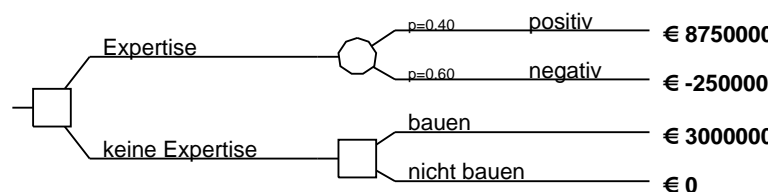


Wie kann man nun die Frage klären, ob es sich lohnt eine Expertise durchführen zu lassen oder nicht? Dazu muss man den Entscheidungsbaum von rechts nach links schrittweise nach folgenden Regeln auflösen:

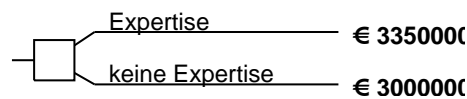
Regeln zur  
Auflösung von  
Entscheidungs-  
bäumen

1. Ersetze jeden *Ereignisknoten* (der letzten Ebene) durch den Erwartungsnutzen des entsprechenden Ereignisses.
2. Ersetze jeden *Entscheidungsknoten* (der letzten Ebene) durch den (Erwartungs-)Wert der besseren Alternative.
3. Führe das Verfahren fort bis die gesuchte (Teil-)Entscheidung erreicht ist.

In unserem Fall ist die gesuchte Entscheidung die Anfangsentscheidung, ob eine Expertise durchgeführt werden soll. Wenn man den Baum nach dem entsprechenden Verfahren reduziert, dann sieht der Entscheidungsbaum nach dem ersten Schritt so aus:



Der Erwartungswert, den man erhält, wenn man die Bohrinself baut, ohne eine Expertise durchzuführen beträgt € 3.000.000 ( $= € 0.4 \cdot 9.000.000 - 0.6 \cdot 1.000.000$ ). Dieser Erwartungswert wurde an die Stelle des entsprechenden Ereignisknotens gesetzt. Da im anderen Fall die Entscheidung zum Bau mit dem Ausgang der Expertise schon feststeht, wurden hier einfach die entsprechenden Werte übertragen. Da der Bau der Ölplattform auch ohne vorherige Probebohrung einen höheren Erwartungswert als 0 € liefert, muss für den letzten Schritt nur noch der Erwartungsnutzen berechnet werden, der sich ergibt, wenn man sich dazu entscheidet, die Expertise durchzuführen. Der nochmals reduzierte Entscheidungsbaum sieht dann so aus:



Es ist nun unmittelbar ersichtlich, dass es besser ist, vorher eine Expertise in Auftrag zu geben, da der daraus resultierende Erwartungswert der größere ist.

Bei all diesen Beispielen haben wir übrigens eine Frage offen gelassen, die in der praktischen Anwendung des Erwartungsnutzens von entscheidender Bedeutung sein kann, nämlich die Frage, woher wir die Wahrscheinlichkeiten kennen, und ob wir sicher sein können, dass die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Ereignisse stimmen, wenn wir schon nicht sicher sein können, welches Ereignis eintritt. Im Einzelfall dürfte dies von der Verfügbarkeit und Zuverlässigkeit wissenschaftlicher Theorien abhängen, die diese Wahrscheinlichkeiten für den entsprechenden Anwendungsbereich bestimmen.

### 1.4.2 Die Rechtfertigung des Erwartungsnutzens

Soeben wurde gezeigt, wie man mit Hilfe des Erwartungsnutzens auf einfache Weise Entscheidungsprobleme lösen kann. Zugleich wurde behauptet, dass der Erwartungsnutzen bei Entscheidungen unter Risiko im Grunde die einzig sinnvolle Entscheidungsregel darstellt. Aber warum ist das so?

Eine Antwort auf diese Frage ist die, dass man, wenn man bei Entscheidungen unter Risiko den Erwartungsnutzen zu Grunde legt, *auf lange Sicht* den größten Gewinn erzielen kann.<sup>19</sup> Um sich das klar zu machen nehme man eine Entscheidungssituation an, in der man entweder einen festen Geldbetrag erhalten kann, oder mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit einen höheren Geldbetrag. Z.B. könnte eine Person vor der Entscheidung stehen, ob sie mit 5 € Einsatz an einer Lotterie teilnehmen will, bei der sie mit 3%

Erwartungs-  
nutzen ist auf  
lange Sicht  
gewinnmaxi-  
mierend

<sup>19</sup>Auch hier gibt es natürlich diskussionsbedürftige Grenz- und Zweifelsfälle, wie z.B. Okasha (2007) vor Augen führt.

Wahrscheinlichkeit 100 € gewinnen kann, oder ob sie das Geld lieber behält. Behält sie das Geld, so entspricht das einem sicheren Gewinn von 5€. Wird diese Entscheidungssituation viele Male wiederholt, dann besagt das Gesetz der Großen Zahlen aus der Statistik, dass der Grenzwert der Häufigkeit, mit der ein bestimmtes Ereignis eintritt (in diesem Fall der Gewinn der Lotterie) mit der Wahrscheinlichkeit 1 (also „praktisch immer“) der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses entspricht. Handelt es sich bei der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses um eine empirisch-statistische Wahrscheinlichkeit und legt man die Häufigkeitstheorie der Wahrscheinlichkeit zu Grunde (siehe Kapitel 3.2.1), so gilt sogar, dass der Grenzwert der Häufigkeit mit Sicherheit der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses entspricht.<sup>20</sup> Einfach ausgedrückt bedeutet dies: Wir können bei hinreichend häufiger Wiederholung getrost davon ausgehen, dass das Ereignis genau so oft eintritt, wie es seiner Wahrscheinlichkeit entspricht. In diesem Fall hieße das, dass drei Prozent der Lotterien gewonnen werden. Bei einem Gewinn von 100 € wird man auf lange Sicht 3 € pro Lotterie eingenommen haben, was genau dem Erwartungswert der Lotterie  $EU = 0.03 \cdot 100 \text{ €}$  entspricht. Damit ist die Lotterie aber deutlich weniger wert als der Einsatz von 5 €. Zumindest auf lange Sicht sollte man immer den Erwartungswert (gleich Wahrscheinlichkeit mal erwarteter Wert) für die Bewertung von Zufallsereignissen zu Grunde legen. Oder, anders gesagt, man soll Zufallsereignisse weder zu optimistisch noch zu pessimistisch bewerten, sondern genau entsprechend ihrer Wahrscheinlichkeit.

Dieselbe Argumentation lässt sich auch auf beliebige kardinale Nutzenwerte übertragen, sofern man die Geldwerte durch Nutzenwerte ersetzt und statt des Erwartungswertes mit dem Erwartungsnutzen rechnet.

Mögliche  
Einwände

Die Argumentation weist zwei Schwierigkeiten auf: Erstens gilt sie nur auf lange Sicht, und es stellt sich zumindest die Frage, ob man das, was auf lange Sicht gilt, auch auf einzelne Zufallsereignisse, die sich in derselben Form nicht wiederholen, übertragen darf. Zweitens lässt sie sich – wie schon erwähnt – nur bei kardinalen Nutzenwerten anwenden, da wir sonst den Erwartungsnutzen nicht einmal bestimmen können. Für beide Probleme versucht die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie eine Lösung anzubieten. Für das erste Problem, indem sie zeigt, dass der Erwartungsnutzen aus bestimmten Konsistenzbedingungen hervorgeht, die verletzt werden, wenn man ihn nicht richtig als das Produkt aus erwartetem Nutzen und Wahrscheinlichkeit berechnet – ähnlich wie subjektive Wahrscheinlichkeiten inkonsistent wer-

<sup>20</sup> „Mit Sicherheit“ und „mit Wahrscheinlichkeit 1“ ist nicht, wie man denken könnte, ein- und dasselbe. Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine unendliche Folge von Münzwürfen nicht jedes mal Kopf liefert beträgt 1. Trotzdem ist diese Ereignis nicht absolut sicher, denn das inverse Ereignis, dass eine unendliche Folge von Münzwürfen jedesmal Kopf liefert, ist immerhin möglich.



den, sobald man die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung verletzt (siehe 3.2.2). Für das zweite Problem, indem sie aus einer beliebigen Präferenzrelation – die aber reich genug sein muss, um auch gedachte Güter von der Form sogenannter „Lotterien“ zu enthalten! – durch trickreiche Vergleiche eine kardinale Nutzenfunktion konstruiert. Diese Theorie werden wir später im Semester noch ausführlich besprechen (Kapitel 4.1).

### 1.4.3 Kausale Entscheidungstheorie

Bei einem der eben besprochenen Beispiele (Seite 69) hingen die Wahrscheinlichkeiten, mit denen Ereignisse eintreten, von den gewählten Handlungen ab.<sup>21</sup> Grundsätzlich werden solche Entscheidungsprobleme so gelöst, dass wir die (handlungsabhängige) Wahrscheinlichkeit jedes möglichen Ergebnisses in der entsprechenden Tabellenzeile vermerken und beim Ausrechnen des Erwartungsnutzens für jede Handlung die in der entsprechenden Zeile vermerkten Wahrscheinlichkeiten berücksichtigen.

Wir können nun noch einen Schritt weitergehen und uns fragen, wie vorzugehen ist, wenn die Wahrscheinlichkeiten des Eintretens von Ereignissen nicht nur von den Handlungen sondern wiederum von anderen Ereignissen und Zuständen abhängig sind. Dazu ein Beispiel (frei nach Resnik (Resnik, 2000, S. 114)): Eine Ärztin steht vor der Frage, ob sie die Infektion eines Patienten mit einem Desinfektionsmittel oder mit einem Antibiotikum behandeln soll. Das Antibiotikum schlägt bei 80% der Patienten gut an, in welchem Fall die Heilungschance bei 70% liegt. Bei den restlichen Patienten liegt die Heilungschance mit demselben Mittel jedoch nur bei 40%. Das Desinfektionsmittel hat dagegen bei allen Patienten eine Heilungschance von 50%. Da beide Mittel, wie wir einmal annehmen wollen miteinander unverträglich sind, besteht nur die Wahl entweder das Antibiotikum zu versuchen oder das Desinfektionsmittel.

Um das Problem in einer Entscheidungstabelle darzustellen, kann man die Ereignisse in zwei Gruppen unterteilen: Unabhängige und Abhängige Ereignisse. In diesem Fall ist das unabhängige Ereignis, dasjenige, ob das Antibiotikum bei dem Patienten anschlägt oder nicht. Das kausal davon abhängige Ereignis ist die Heilung (oder Nicht-Heilung) des Patienten. Dabei müssen für jedes unabhängige Ereignis alle abhängigen Ereignisse gesondert eingetragen werden. Wichtig ist, dass man innerhalb der Tabelle die entsprechenden bedingten Wahrscheinlichkeiten einträgt. Daraus ergibt sich folgende Entscheidungstabelle:

---

<sup>21</sup>Das Hellscherparadox (Kapitel 4.2.2) liefert ein weiteres, wenn auch, da es echte hellseherische Fähigkeiten voraussetzt, sehr konstruiertes Beispiel dafür.

	A. schlägt an (80%)		schlägt nicht an (20%)	
	Heilung (70%)	¬Heilung (30%)	Heilung (40%)	¬Heilung (60%)
	gesund (56%)	krank (24%)	gesund (8%)	krank (12%)
Antibiotikum	gesund (40%)	krank (40%)	gesund (10%)	krank (10%)
Des.-Mittel				

Wie man sieht, wäre bei diesem Beispiel die Heilungschance mit dem Antibiotikum ( $56\% + 8\% = 64\%$ ) größer als mit dem Desinfektionsmittel ( $40\% + 10\% = 50\%$ ). Sind bei einem Entscheidungsproblem wie diesem die Kausalzusammenhänge zwischen Ereignissen und Handlungen zu berücksichtigen, bietet sich oft die anschaulichere Baumdarstellung an.

#### 1.4.4 Entscheidungsregeln in der Philosophie: Die Debatte zwischen John Rawls und John C. Harsanyi

Zum Abschluss des Teils über „Techniken des Entscheidens“ soll ein Beispiel aus der Philosophie erörtert werden, das vor Augen führt, wie technische Fragen der Entscheidungstheorie auch in die philosophische Diskussion hineinspielen können. Bei diesem Beispiel kommen besonders die Maximin-Regel und das Prinzip der Indifferenz zum Tragen.

Rawls' Differenzprinzip

Die Maximin-Regel hat in der Philosophie einige Bekanntheit erlangt, weil sie an prominenter Stelle in John Rawls sehr einflussreichem Werk „Eine Theorie der Gerechtigkeit“ auftaucht. John Rawls vertritt in diesem Werk den Grundsatz, dass dasjenige Gesellschaftsmodell das gerechteste ist, in dem es den am schlechtesten gestellten Menschen im Vergleich mit anderen Modellen am besten geht. Etwas anders formuliert könnte man auch sagen, dass Ungleichheit nur insoweit gerechtfertigt ist, wie sie *jedermann* zum Vorteil gereicht (Rawls, 1971, S. 96ff.). Dieses Prinzip wird auch das „Differenzprinzip“ genannt. Rawls stellt diesem Prinzip noch das von Kant übernommene „Freiheitsprinzip“ voran, wonach in der Gesellschaft jeder Mensch soviel Freiheit genießen soll wie möglich ist, sofern seine Freiheit mit demselben Maß an Freiheit für andere Menschen noch verträglich sein soll. Unfreie Gesellschaften kommen also von vornherein nicht als gerechte Gesellschaften in Betracht. Uns soll hier aber nur das Differenzprinzip interessieren.

Rawls liefert in seinem Werk für das Differenzprinzip eine Quasi-Ableitung, für die er sich der in der vertragstheoretischen Tradition seit Hobbes beliebten Vorstellung eines Urzustandes bedient. Rawls stellt sich einen hypothetischen Urzustand vor, in dem die Menschen ein Gesellschaftsmodell wählen dürfen. In diesem Urzustand wissen sie aber noch nicht, welche (soziale) Rolle sie in der gewählten Gesellschaft einnehmen werden. Sie befinden sich hinter einem *Schleier des Nichtwissens*. Welche Gesellschaft werden sie in einer solchen Situation wohl wählen? An dieser Stelle kommt die Maximin-Regel ins Spiel. Denn Rawls ist überzeugt davon, dass in einer solchen Si-

tuation die einzige Entscheidungsregel, deren sich ein vernünftiger Mensch bedienen würde, die Maximin-Regel ist. (Wenn es um das eigene Lebensschicksal geht, dann sollte man besser auf Nummer sicher gehen.) Nach der Maximin-Regel würden die Menschen aber die Gesellschaft wählen, die nach dem Differenzprinzip die Gerechteste ist, denn das ist genau die Gesellschaft, in der es einem im schlimmsten Fall noch am besten geht.

Harsanyi's  
utilitaristischer  
Gegenstand-  
punkt

Harsanyi vertritt dazu den utilitaristischen Gegenstandspunkt: Seiner Ansicht nach muss eine rationale Entscheidungsregel auf dem Prinzip der Indifferenz beruhen und statt der Maximin-Regel den Durchschnittsnutzen heranziehen unter der Annahme der Gleichverteilung aller möglichen Ergebnisse. Er rechtfertigt dies einmal mit offensichtlichen Konsistenzbedingungen wie z.B. der Transitivität der Präferenzen oder dem Prinzip „Du wirst besser gestellt sein, wenn Du [in einer Lotterie] einen höheren Gewinn mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit angeboten bekommst, als wenn Du einen niedrigeren Gewinn mit der gleichen Wahrscheinlichkeit angeboten bekommst“ (Harsanyi, 1980, S. 47), von denen man in der Tat mathematisch zeigen kann, dass wenigstens einige davon verletzt werden, wenn man vom Durchschnittsnutzen abweicht. Eine nicht unwichtige Voraussetzung ist dabei aber, dass Harsanyi hinter dem Schleier des Nichtwissens entsprechend dem Indifferenzprinzip eine Gleichverteilung der möglichen individuellen Rollen annimmt.<sup>22</sup> Zusätzlich führt Harsanyi noch einige Einzelbeispiele in Form von Gedankenexperimenten an, in denen die Maximinregel unplausibel erscheint, wie z.B.: „Du kannst in Chicago einen super Job bekommen, oder zu Hause bei Deinem miesen Job bleiben. Wenn Du nach Chicago fliegst, könnte das Flugzeug natürlich abstürzen...“ Nach der Maximin-Regel müsste man zu Hause bleiben, was Harsanyi absurd findet.

Um den Unterschied der beiden Positionen in Bezug auf die Frage der Gerechtigkeit zu verdeutlichen, können wir uns als Beispiel (Resnik, 2000, S. 41) zwei mögliche Gesellschaftsmodelle denken. In dem ersten Gesellschaftsmodell arbeiten 10% der Menschen hart, damit die restlichen 90% wohlleben können. Die 10% Arbeiter erhalten jeweils einen (kardinalen) Nutzen von 1, die anderen von 90, macht im Schnitt 81,1. In einem anderen Gesellschaftsmodell muss sich jeder an der Arbeit beteiligen, und jeder erzielt einen Nutzen von 35. Für welche Gesellschaft würden sich die Menschen hinter einem

<sup>22</sup>Das ist so zu verstehen: Angenommen in der Gesellschaft, für die die Verfassung gefunden werden soll, gibt es 1 Mio Individuen, dann muss der Einzelne nach dem Indifferenzprinzip annehmen, dass er mit gleicher Wahrscheinlichkeit jedes dieser Individuen sein könnte. Wenn wir also eine Verfassung betrachten, bei der 99% der Menschen in Armut leben und 1% in Reichtum, so muss der Einzelne annehmen, dass er mit 99% Wahrscheinlichkeit die Rolle eines der Armen übernehmen wird. Insofern hängt das Gewicht einer bestimmten gesellschaftlichen Klasse bei Harsanyi auch von ihrer Größe ab.

Mögliche Re-  
konstruktionen  
von Rawls'  
Theorie

*Schleier des Nichtwissens* entscheiden? Mit Rawls und dem Maximin-Prinzip für die zweite. Mit Harsanyi und dem Utilitarismus für die erste.

Wie sind die unterschiedlichen Positionen zu beurteilen? Kann Harsanyi Rawls Gerechtigkeitstheorie mit Hilfe der Entscheidungstheorie widerlegen? Die Beantwortung dieser Frage hängt sehr stark davon ab, wie man die Gerechtigkeitstheorie von Rawls und insbesondere ihre Begründungslogik rekonstruiert. Es gibt – stark vereinfacht – zwei Möglichkeiten das zu tun:

1. Ethische Re-  
konstruktion

1. Man siedelt die *ethische Basisentscheidung* auf der Ebene des Gerechtigkeitsprinzips selbst an. Dann muss man zunächst die Entscheidung (im *dezisionistischen*, nicht im entscheidungstheoretischen Sinne!) treffen, ob man das Differenzprinzip oder den Utilitarismus als Gerechtigkeitsprinzip wählen möchte. Alle Schlussfolgerungen, die man dann aus dem gewählten Prinzip in Bezug auf den Aufbau und die Institutionen der gerechten Gesellschaft zieht, sind dann ethische Deduktionen. All dasjenige, *woraus* man umgekehrt das gewählte Gerechtigkeitsprinzip ableiten könnte, also insbesondere alle Urzustandsszenarien, sind dann lediglich begründende Mythen, deren berechtigter Zweck allein darin besteht, das Gerechtigkeitsprinzip zu motivieren, erzählerisch auszuschnücken, propagandistisch aufzuwerten usw.

Sollte sich nun durch eine entscheidungstheoretische Kritik wie der von Harsanyi zeigen, dass das gewählte Gerechtigkeitsprinzip nicht aus dem Urzustand ableitbar ist, dann beweist das bestenfalls, dass man auf einen ungeeigneten Mythos zurückgegriffen hat, um es zu motivieren. Andererseits beruht aber gerade die Kritik von Harsanyi auf dem Nachweis der Verletzung von Konsistenzbedingungen durch die von Rawls für die Entscheidung im Urzustand reklamierte Maximin-Regel. Nun kann man aber ernsthaft fragen, ob es für das Urzustandsszenario, zumal wenn es ohnehin keine begründende Bedeutung hat, auf die Konsistenz und Rationalität (im dem engen Sinne, in dem Harsanyi den Ausdruck Rationalität gebraucht) der Entscheidung überhaupt ankommt. Rawls beansprucht freilich, dass eine Entscheidung nach der Maximin-Regel im Urzustand eine vernünftige Entscheidung ist. Aber schlimmstenfalls wäre er nur gezwungen seinen Urzustandsmythos fallen zu lassen oder durch einen anderen zu ersetzen, nicht jedoch dazu, das Differenzprinzip aufzugeben.

2. Meta-  
ethische  
Rekonstruktion

2. Man siedelt die ethische Basisentscheidung auf der Ebene des Urzustandes oder sogar davor an, so dass diejenige Gesellschaftsordnung als gerecht gelten muss, die sich daraus ableiten lässt. In gewisser Weise scheint die Basisentscheidung, zumindest was Harsanyi betrifft, noch

vor dem Urzustand zu liegen, indem er als wesentliches Merkmal des Moralischen vorauszusetzen scheint, dass man von den Interessen, die man als konkretes Einzelindividuum hat absieht und die Interessen der anderen gleichwertig mitberücksichtigt. Das motiviert dann die Konstruktion des Urzustandes hinter dem Schleier des Nichtwissens. (Eine Konstruktion von der Harsanyi beansprucht, dass er sie unabhängig von Rawls schon herangezogen hat.) Außer dieser recht formalen Bedingung für Moral scheint Harsanyi weitere, konkrete ethische Entscheidungen (im Sinne von Dezsionen) nicht zuzulassen.

Nur in diesem zweiten Fall kommt der entscheidungstheoretischen Argumentation tatsächlich eine Schlüsselfunktion zu. Denn einmal den Urzustand als ethische Basisentscheidung gegeben, hängt es von der korrekten Anwendung der entscheidungstheoretischen Regeln ab, welches Gesellschaftsmodell als das gerechteste betrachtet werden muss. Harsanyis Kritik ist an Rawls Gerechtigkeitsideal ist dann in dem Maße berechtigt wie seine Kritik der Maximin-Regel zutrifft.

Was ist zu dieser Kritik zu sagen? Zunächst, was die Einzelbeispiele betrifft, mit denen Harsanyi gegen die Maximin-Regel polemisiert: Gegen den Utilitarismus kann man ebensogute Einzelbeispiele anführen, z.B.: Ein Mensch ist todkrank und kann nur durch eine Spenderniere gerettet werden. Da sich kein Spender findet, ordnet die Regierung an, einem, der als Spender in Frage käme, zwangsweise eine Niere zu entnehmen. Aus utilitaristischer Sicht ist das Handeln der Regierung sehr zu loben, da die Gesamtnutzenbilanz: Gerettetes Leben des einen abzüglich des körperlichen Schaden des anderen positiv ausfällt. (Das Beispiel verweist auf ein Grundproblem des Utilitarismus, nämlich dessen Unfähigkeit *unveräußerliche Rechte* wie z.B. ein Recht auf körperliche Unversehrtheit) zu begründen. Oder: Auf einer Insel ist eine Gruppe von Leuten gestradet. Die Rettung ist unterwegs, verzögert sich aber und wird erst eintreffen, wenn schon alle verhungert sind. Wenn nun aber die eine Hälfte der Gruppe die andere schlachtet und verspeist, kann wenigstens die Hälfte bis zum eintreffen der Rettung überleben. Utilitaristisch und unter dem Gesichtspunkt des Durchschnittsnutzens betrachtet, ist es besser, wenn die Hälfte überlebt als wenn alle sterben und der Kannibalismus damit zur moralischen Pflicht erhoben. . . Kurz, mit Einzelbeispielen kann man jedes Moralprinzip kleinkriegen. (Das zeigt weder, dass Einzelbeispiele noch dass allgemeine Moralprinzipien falsch sind, aber vielleicht, dass man nicht mit einem einzigen einfachen Moralprinzip auskommt, und dass in der Moral wie im Leben ein gewisses Maß an Inkonsequenz empfehlenswert ist.)

Beispiele gegen  
den  
Utilitarismus

Reichweite des  
Inkonsistenz-  
vorwurfs

Ernstzunehmender ist die Kritik, soweit sie sich auf die Verletzung von elementaren Konsistenzbedingungen durch die Maximin-Regel bezieht. Allerdings setzt Harsanyi bei seiner Kritik *kardinale* Nutzenbewertungen für die sozialen Rollen voraus, die die Individuen in unterschiedlichen Gesellschaftsmodellen einnehmen (Harsanyi, 1980, S. 48f.). Zudem geht er von der Gültigkeit der Erwartungsnutzenhypothese (siehe Kapitel 1.4.1, Seite 66) aus. Ohne auf die Problematik des *kardinalen Nutzens* an dieser Stelle schon einzugehen (siehe dazu Kapitel 4.2, Seite 197), ist anzumerken, dass die Voraussetzungen für die Anwendung eines derart starken Nutzenkonzepts in dem vorliegenden Gedankenexperiment kaum gegeben sein dürften. Auch der Rückgriff auf den Erwartungsnutzen ist, da es sich um ein einmaliges Ereignis handelt, mit Einschränkungen fragwürdig. Die Anwendung des Indifferenzprinzips führt hier zwar nicht zu Paradoxien, da man einigermaßen schlüssig davon ausgehen kann, dass wir es auf die Wahrscheinlichkeit beziehen, jeweils eine bestimmte individuelle Rolle zu übernehmen. Aber da die Annahme jeder anderen Wahrscheinlichkeitsverteilung genauso legitim wäre, kann Harsanyi an Rawls' Ansatz nicht legitimerweise kritisieren, dass dabei implizit eine sehr unausgewogene Wahrscheinlichkeitsverteilung angenommen wird. (Ohne das Indifferenzprinzip lassen sich die dem Rawls'schen Ansatz vorgeworfenen Inkonsistenzen aber immer durch eine entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilung auffangen.)

Harsanyis  
dogmatischer  
Szientismus

Schließlich sei noch angemerkt – aber dies ist zugegebenermaßen mehr ein Vorbehalt – dass es bei Harsanyi manchmal so erscheint, als ob er den Utilitarismus nur auf Grund einer idiosynkratischen Vorliebe für ein Moralsystem bevorzugt, das sich am ehesten mit der von ihm offenbar geschätzten Stilform eines (wahrscheinlichkeitstheoretischen) Kalküls verbinden lässt, ohne dass er die dabei zu treffenden sittlichen Entscheidungen überhaupt bewusst als solche reflektiert. In der Einleitung seiner Rawls-Kritik lässt er die Bemerkung fallen, dass der Utilitarismus „up to now in its various forms was virtually the only ethical theory proposing a reasonably clear, systematic and purportedly rational concept of morality“ (Harsanyi, 1980) sei, als ob das die einzigen oder gar wichtigsten Maßstäbe wären, nach denen man die Entscheidung für oder gegen ein Moralsystem treffen müsste, und nicht vielmehr in erster Linie dessen sittlicher Gehalt! Sofern man die Kriterien „reasonably clear, systematic and purportedly rational“ nicht von vornherein in einem so engen Sinne versteht, dass seine Behauptung, dass nur der Utilitarismus sie erfülle, tautologisch wird, dürfte diese Behauptung philosophiehistorisch gesehen ohnehin schlichtweg falsch sein.

### 1.4.5 Aufgaben

1. Zeige durch ein Beispiel, dass der berechnete Erwartungsnutzen sich bei gleichbleibenden Präferenzen ändern kann, wenn man bloß von einem *ordinalen Nutzen* ausgeht. M.a.W.: Um den Erwartungsnutzen sinnvoll einsetzen zu können, müssen wir immer das vergleichsweise stärkere aber empirisch schwerer zu rechtfertigende Konzept des *kardinalen Nutzens* voraussetzen.
2. Stelle das folgende Entscheidungsproblem aus der Vorlesung (Seite 68) als Entscheidungsbaum dar und löse den Entscheidungsbaum schrittweise auf.

	$S_1$ ( $p = 0.3$ )	$S_2$ ( $p = 0.2$ )	$S_3$ ( $p = 0.5$ )	
$A_1$	-100.000 €	-50.000	€ 60.000	$EU = -10.000$ €
$A_2$	0 €	-80.000	€ 0	$EU = -16.000$ €

$A_1$  Investiere in die rasche Entwicklung eines Kleinstlaptops.

$A_2$  Investiere nicht in die Entwicklung eines Kleinstlaptops.

$S_1$  Kleinstlaptops bleiben auf dem Markt erfolglos.

$S_2$  Kleinstlaptops sind erfolgreich, aber die Konkurrenz ist ebenfalls frühzeitig auf dem Markt präsent.

$S_3$  Kleinstlaptops sind erfolgreich, aber die Entwicklung der Konkurrenz verzögert sich.

3. Stelle das folgende Entscheidungsproblem als Entscheidungsbaum dar: Eine Ärztin steht vor der Frage, ob sie die Infektion eines Patienten mit einem Desinfektionsmittel oder mit einem Antibiotikum behandeln soll. Das Antibiotikum schlägt bei 80% der Patienten gut an, in welchem Fall die Heilungschance bei 70% liegt. Bei den restlichen Patienten liegt die Heilungschance mit demselben mittel jedoch nur bei 40%. Das Desinfektionsmittel hat dagegen bei allen Patienten eine Heilungschance von 50%. Da die Mittel miteinander unverträglich sind, besteht nicht die Möglichkeit beide Mittel zu verabreichen.

	A. schlägt an (80%)		schlägt nicht an (20%)	
	Heilung (70%)	¬Heilung (30%)	Heilung (40%)	¬Heilung (60%)
Antibiotikum	gesund (56%)	krank (24%)	gesund (8%)	krank (12%)
Des.-Mittel	gesund (40%)	krank (40%)	gesund (10%)	krank (10%)

4. Wie kann man die Wahl eines Gesellschaftsmodells hinter einem Rawlschen *Schleier des Nichtwissens* als Entscheidungstabelle darstellen? Und als Entscheidungsbaum?





# Kapitel 2

## Zur Theorie der Kollektiven Entscheidungen

### 2.1 Sozialwahltheorie

Bisher haben wir uns nur mit individuellen Entscheidungen beschäftigt. Für die Anwendung der Theorie ist es dabei weniger wichtig, ob die Akteure bzw. „Agenten“ tatsächlich einzelne Individuen sind, oder ob sie etwa Gruppen oder Körperschaften sind. Entscheidend ist, dass sie über eine ganz bestimmte Präferenzrelation verfügen, die die Bedingungen für Präferenzrelationen erfüllt, also Ordnung, Transitivität etc. (siehe Kapitel 1.2.2, ab Seite 26). Die Sozialwahltheorie beschäftigt sich nun genau mit der Frage, wie eine Gruppe von Individuen kollektive Entscheidungen treffen kann, wenn man noch nicht von vornherein eine kollektive Präferenzrelation als gegeben betrachtet. Man könnte auch sagen, dass das Problem bzw. eines der Hauptprobleme der Sozialwahltheorie darin besteht, wie man individuelle Präferenzen auf kollektive Präferenzen abbilden kann. Um ein Problem handelt es sich insofern, als die individuellen Präferenzen einer Gruppe von Menschen höchst unterschiedlich beschaffen sein können, selbst wenn man einmal annimmt, dass jedes Mitglied der Gruppe über eine im Sinne der Theorie gültige Präferenzrelation verfügt. Wie wir sehen werden, kann es zu Schwierigkeiten kommen, wenn man daraus eine kollektive Präferenzrelation ableiten will, die immer noch die Bedingungen einer wohlgeordneten Präferenzrelation erfüllt.

kollektive Entscheidungen

Die individuellen Präferenzen sämtlicher Individuen zusammengenommen, bezeichnet man auch als „*Präferenzprofil*“. Ein Präferenzprofil ist also eine Menge von individuellen Präferenzrelationen. Die Abbildung des Profils von individuellen Präferenzrelationen auf eine einzelne kollektive Präferenzrelation nennt man eine „*soziale Wohlfahrtsfunktion*“ oder, im Zusammen-

soziale Wohlfahrtsfunktion

hang der Entscheidungstheorie, auch ein „*Kollektiventscheidungsverfahren*“. Mathematisch betrachtet haben wir es dabei mit folgenden Gegenständen zu tun:

1. Mit einer Menge  $\mathcal{X} = \{x, y, z, \dots\}$  von Alternativen oder Güterbündeln, die jeweils mit kleinen Buchstaben bezeichnet werden. Die Menge aller auf  $\mathcal{X}$  möglichen Präferenzrelationen soll mit  $\mathcal{R}$  bezeichnet werden. (Für die definierenden Eigenschaften einer gültigen Präferenzrelation siehe 27.)
2. Mit einer bestimmten Anzahl von Individuen  $A, B, C, \dots$ , die mit Großbuchstaben vom Anfang des Alphabets bezeichnet werden. Die Individuen kann man sich durchnummeriert denken, so dass man sinnvollerweise statt von  $A, B$  oder  $C$  auch vom ersten, zweiten oder dritten Individuum oder ganz allgemein vom „ $i$ -ten Individuum“ sprechen kann.
3. Mit individuellen Präferenzrelationen, wobei jedes Individuum natürlich eigene Präferenzen hat. Um anzuzeigen, wessen Präferenzen gemeint sind, kann man einen Index an das Präferenzzeichen anhängen, d.h.  $x \succ_i y$ , bedeutet, dass das  $i$ -te Individuum  $x$  gegenüber  $y$  vorzieht. Die gesamte Präferenzrelation eines Individuums kann man mit  $R_i$  bezeichnen.
4. Mit einer kollektiven Präferenzrelation, d.i. diejenige Präferenzrelation, die später für das Kollektiv gelten soll, und die, solange nichts Näheres darüber bestimmt ist, völlig unabhängig von den individuellen Präferenzen ist. Um zu kennzeichnen, dass kollektive Präferenzen gemeint sind, wird der Index  $K$  an das Präferenzzeichen angehängt, also etwa  $x \succ_K y$ . Die gesamte kollektive Präferenzrelation wird wiederum mit  $R_K$  bezeichnet.
5. Mit Profilen von individuellen Präferenzen. Ein Profil ist dabei ein Tupel von individuellen Präferenzrelationen, in der für jedes Individuum genau eine Präferenzrelation  $R_i$  festgelegt ist. Wenn wir ein beliebiges Präferenzprofil mit  $P$  bezeichnen, dann gilt  $P = (R_1, \dots, R_n)$ . Zwei Präferenzprofile  $P_1, P_2$  unterscheiden sich dann, wenn mindestens ein Individuum in  $P_1$  andere Präferenzen hat als in  $P_2$ . (Und es hat andere Präferenzen, wenn es wenigstens bezüglich eines Paares von Alternativen eine andere Ordnung vornimmt.)

6. Mit der Menge aller möglichen Präferenzprofile  $\mathcal{P}$ , die, wie der Name schon sagt, jedes nur denkbare Profil von wohlgeordneten individuellen Präferenzen enthält.

Eine *Kollektiventscheidungsverfahren* (auch „soziale“ bzw. „gesellschaftliche Wohlfahrtsfunktion“ oder einfach „Sozialwahlfunktion“) ist nun eine Funktion  $f : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{R}$ , die jedem Präferenzprofil  $P \in \mathcal{P}$  eine „kollektive“ Präferenzrelation  $R_K \in \mathcal{R}$  zuordnet. Man kann auch schreiben:  $f(P_1, \dots, P_n) = R_K$ , wobei  $(P_1, \dots, P_n)$  ein bestimmtes Präferenzprofil ist, und  $R_K$  diejenige Präferenzrelation, die diesem Profil durch die Sozialwahlfunktion  $f$  zugeordnet wird.

mathematische  
Definition

Mit Hilfe dieses technischen Apparats kann die Frage untersucht werden, welche Entscheidungs- bzw. Abstimmungsprozeduren zum Treffen von Kollektiventscheidungen geeignet sind. Z.B. kann man damit die Frage untersuchen, ob die Entscheidung nach dem demokratischen Mehrheitsprinzip zu effizienten, gerechten und konsequenten Kollektiventscheidungen führt. Dazu müssen die entsprechenden Anforderungen an eine Sozialwahlfunktion (Effizienz, Gerechtigkeit etc.) natürlich zunächst mathematisch umschrieben werden. In diesem Zusammenhang ist es wichtig darauf hinzuweisen, dass die Sozialwahltheorie keineswegs die einzige Theorie ist, die sich mit diesen Fragen beschäftigt. Vielmehr werden die entsprechenden Fragen in der politischen Philosophie schon seit der Antike thematisiert, und schon längst bevor es die Sozialwahltheorie als eigenes Fachgebiet gab, sind auf viele der von ihr untersuchten Probleme praxistaugliche Lösungen gefunden worden. Was die Sozialwahltheorie von früheren Ansätzen unterscheidet ist der formale mathematische Rahmen, in dem sie diese Probleme untersucht. Leider erweist sich dieser formale Rahmen nicht immer als ein Vorteil, indem viele wichtige Probleme und Fragestellungen, die im Zusammenhang mit kollektiven Entscheidungsprozessen stehen, sich innerhalb dieses Rahmens entweder überhaupt nicht oder nicht adäquat artikulieren lassen. Die Sozialwahltheorie gibt nur einen ganz bestimmten Blickwinkel auf solche Phänomene wie das der demokratischen Mehrheitsentscheidung frei. Was z.B. weitgehend ausgespart bleibt, sind sogenannte „deliberative“ Prozesse, also diejenigen Vorgänge, in denen sich – in der ökonomistischen Sprache formuliert – die Präferenzen der Individuen in Folge von öffentlichen Diskussionen verändern, aneinander anpassen oder sich dissoziieren und in Lager aufteilen. Und in einer nicht ökonomistischen Sprache formuliert, sind deliberative Prozesse all diejenigen Diskussions- und Meinungsbildungsprozesse, die, besonders in Demokratien, politischen Entscheidungen oder Abstimmungen voraus zu gehen pflegen. Will man ein richtiges und vollständiges Bild von der Natur demokratischer politischer Entscheidungsprozesse gewinnen, so ist die Sozialwahltheorie al-

Grenzen der  
Sozialwahl-  
theorie

lein dafür völlig unzureichend und sollte unbedingt durch andere Theorien, z.B. solche, die deliberative Prozesse zum Gegenstand haben, ergänzt werden. Zur klassischen politischen Philosophie steht die Sozialwahltheorie also bestenfalls im Verhältnis einer Ergänzung. Keineswegs handelt es sich dabei um eine „streng wissenschaftliche“ Alternative, die die traditionelle politische Philosophie ablösen oder ersetzen könnte.

### 2.1.1 Zum Einstieg: Das Condorcet-Paradox

Der grundlegende Widerspruch, auf dem in der ein- oder anderen Form viele der Unmöglichkeitsbeweise der Sozialwahltheorie aufbauen, lässt sich beispielhaft am sogenannten Condorcet-Paradox erläutern. Angenommen, wir haben drei Individuen  $A, B, C$ , die über drei Alternativen  $x, y, z$  abstimmen wollen. Alle Individuen sind dabei gleichberechtigt. Ihre Präferenzen sind folgendermaßen verteilt:

$A$	$B$	$C$
$z$	$x$	$y$
$x$	$y$	$z$
$y$	$z$	$x$

Condorcet-Kriterium

zyklische Präferenzen

Welche Alternative sollte gewählt werden? Jede Alternative steht einmal an erster, einmal an zweiter und einmal an dritter Stelle. Man kann also keine Alternative ohne Weiteres als die kollektiv beste auszeichnen, wenn man nicht eines der Individuen in ungerechter Weise bevorzugen will. Das Problem lässt sich auch nicht einfach verfahrenstechnisch lösen. Denn wollte man zum Beispiel Stichwahlen durchführen, so würde im ersten Wahlgang jede Alternative die gleiche Stimmenzahl erhalten, so dass man keine Alternative für den zweiten Wahlgang ausschließen könnte. Wollte man paarweise Stichwahlen durchführen, so ergibt sich jeweils, dass  $x \succ_K y$ ,  $y \succ_K z$ , aber ebenso auch  $z \succ_K x$ . Bei jedem dieser Paare wird ja das vordere Glied von jeweils zwei Individuen bevorzugt. Man nennt den Mechanismus von paarweisen Stichwahlen zur Bestimmung der bevorzugten Alternative aus einer Menge von Alternativen über die mehrere Individuen (möglicherweise) unterschiedliche Präferenzen haben auch *Condorcet-Kriterium* (nach dem Marquis des Condorcet, einem französischen Philosophen und Mathematiker des 18. Jahrhunderts, der dieses Kriterium vorgeschlagen hat). Das Condorcet-Kriterium zur Bestimmung der kollektiven Präferenzen würde also zu *zyklischen Präferenzen* führen, weil  $x \succ_K y \succ_K z \succ_K x$  gilt. Damit wäre aber die Transitivität der kollektiven Präferenzrelation verletzt. Nun haben wir zwar gesehen, dass intransitive Präferenzen keineswegs „unnatürlich“ sein müssen (siehe Seite

29). Das vorliegende Beispiel zeigt ja gerade, dass sie auf eine ganz natürliche und naheliegende Weise (paarweise Stichwahlen) zustande kommen können. Aber intransitive Präferenzen werfen trotzdem sowohl theoretische („Geldpumpenargument“, siehe Seite 28) als auch praktische Probleme auf. Denn welche Alternative soll man im Fall zyklischer kollektiver Präferenzen wählen, wenn man vermeiden will, irgendjemanden zu bevorzugen. Eine der naheliegendsten Lösungen um mit „Pattsituationen“ dieser Art umzugehen, besteht darin das Los entscheiden zu lassen, denn beim Losverfahren bleibt die demokratische Gleichheit dadurch gewahrt, dass jeder die gleichen Chancen hat. Es ist daher auch nicht verwunderlich, dass wir dieses Mittel seit der Antike in zahlreichen Satzungen und Verfassungen für u.a. diejenigen Fälle vorgesehen finden, in denen eine Abstimmung nicht zu einem eindeutigen Ergebnis führt (DeLong, 1991). (Ein anderer wichtiger Grund für den Einsatz des Losverfahrens ist, dass es sich nicht wie Abstimmungen durch Stimmenkauf oder Erpressung manipulieren lässt. Bei historischen Beispielen der Verlosung von Ämtern (z.B. im antiken Athen oder in den italienischen Republiken in der Zeit der Renaissance) kommt hinzu,<sup>1</sup> dass man auf diese Weise verhindern wollte, dass dieselben Ämter immer in der Hand derselben Familien bleiben.)

Losentscheid  
zur Auflösung  
von Zyklen

Die mögliche Entstehung *zyklischer kollektiver Präferenzen* ist nur eins von mehreren Problemen, an denen Abstimmungsverfahren leiden können. Ein weiteres mögliches Problem bestimmter Abstimmungsverfahren, das bei „ungünstig“ verteilten individuellen Präferenzen auftreten kann, ist das der *Pfadabhängigkeit*. Angenommen, wir hätten uns entschlossen, statt, wie eben, über alle Paare abzustimmen, zunächst zwischen einem beliebig herausgegriffenen Paar von Alternativen abzustimmen und dann zwischen dem Gewinner dieser Abstimmung und der verbleibenden Alternative. (Sollte es mehr als drei Alternativen geben, kann man das Verfahren einfach noch einmal durchführen, solange bis am Ende eine Alternative gewonnen hat.) Die Teilnehmer *A*, *B* und *c* aus der Tabelle auf Seite 84 würden also z.B. zuerst über *x* und *y* abstimmen, wobei *x* mit 2 Stimmen zu einer Stimme gewinnt. Dann stimmen sie über die verbleibende Alternative *x* oder *z* ab. Diesmal gewinnt *z* mit 2:1 Stimmen. Das Problem besteht nun darin, dass eine ganz andere Alternative gewonnen hätte, wenn nicht mit der Abstimmung über *x* und *y* begonnen worden wäre, sondern z.B. mit der Abstimmung über *x* und *z* begonnen, dann hätte sich zunächst *z* gegen *x* behauptet, aber bei der anschließenden Stichwahl zwischen *z* und *y* hätte *y* gewonnen. Das Abstimmungsergebnis hängt also (bei entsprechend ungünstig verteilten Präferenzen) in kontingenter Weise von der Reihenfolge der Abstimmung (bzw. dem gefählten „Pfad“) ab. Man könnte auch sagen, der Sieg von *z* im ersten Fall bzw. von *y* im zweiten

Pfadabhängigkeit

<sup>1</sup>Darauf hat mich Rudolf Schüssler aufmerksam gemacht.

Fall ist bloß ein „Artefakt des Abstimmungsmechanismus“. (Eine präzise Definition des Begriffs des „Artefakts eines Abstimmungsmechanismus“ könnte lauten: Eine Artefakt eines Abstimmungsmechanismus ist ein Abstimmungsergebnis, das nur durch die Verletzung unserer Erwartungen an einen fairen und vernünftigen Abstimmungsmechanismus zustande gekommen ist. In dem Beispiel eben wäre dann die Erwartung verletzt, dass ein Abstimmungsmechanismus pfadunabhängig sein sollte.) Unter Umständen könnte dieses Problem sogar Manipulationsmöglichkeiten für einen geschickten Wahlleiter eröffnen, der die Reihenfolge der Stichwahlen festlegen darf (siehe Übungsaufgabe 1 auf Seite 108).

Das selbe Beispiel verdeutlicht zugleich ein weiteres Problem – wenn man es für ein Problem hält –, nämlich das des *strategischen Wählens*. Nehmen wir an, die Reihenfolge der Abstimmungen sei bereits dahingehend festgelegt, dass zunächst zwischen  $x$  und  $y$  und dann zwischen der Siegeralternative und  $z$  abgestimmt wird. Angenommen nun, Individuum  $B$  würde in der ersten Runde nicht für  $x$ , sondern „strategisch“, d.h. entgegen den eigenen Präferenzen, für  $y$  stimmen, dann würde sich  $y$  in der zweiten Runde durchsetzen und  $B$  hätte vermieden, dass die aus  $B$ s Sicht schlechteste Alternative  $C$  gewinnt. „Strategisches Wählen“ kann man insofern als ein Problem ansehen, als die Transparenz eines Abstimmungsvorgangs darunter leidet, erst recht dann, wenn sich alle Beteiligten solcher Ticks bedienen.

Nun wäre es sehr naheliegend, um solche Probleme zu vermeiden, die Forderung zu erheben, nur solche Abstimmungsverfahren zu verwenden, bei denen keine „Artefakte“ auftreten können. Leider gibt es, wie u.a. der weiter unten (Kapitel 2.1.3) zu besprechende Satz von Arrow zeigt, kein Verfahren, das in dieser Hinsicht alle Wünsche erfüllen könnte. Irgendwelche (möglichen) Artefakte muss man bei jedem Abstimmungsmechanismus in Kauf nehmen. Und welches Abstimmungsverfahren man unter dieser Bedingung für das „bestmögliche“ hält, hängt wiederum davon ab, welche Einschränkungen man bereit ist in Kauf zu nehmen. Darüber und auch über die Frage, wie gravierend diese Schwierigkeiten insgesamt sind, werden wir uns ausführlich im nächsten Kapitel (Kapitel 2.2) unterhalten.<sup>2</sup>

Schließlich, und als wären die aufgezählten Probleme: zyklische kollektive Präferenzen, Pfadabhängigkeit, Manipulation durch Festlegung der Abstimmungsortung bzw. -reihenfolge, strategisches Wählen nicht schon genug, kann man auch das der Tatsache, dass es keinen einzigen Abstimmungs-

<sup>2</sup> Alle hier aufgezählten „Probleme“ und noch einige mehr werden nicht ohne einen gewissen Hang zur Dramatisierung bei William Riker breit getreten (Riker, 1988). Eine knappe und sehr verständliche Zusammenfassung der beschriebenen Phänomene findet man bei Gerry Mackie (Mackie, 2003, S. 5-9), der Riker's skeptischen Schlussfolgerungen bezüglich demokratischer Entscheidungsverfahren ansonsten aber entschieden widerspricht.

mechanismus gibt, der alle Probleme vermeidet, sondern eine Vielzahl von alternativen Abstimmungsverfahren mit jeweils unterschiedlichen Schwierigkeiten, ein Problem machen. Denn da unterschiedliche Abstimmungsmechanismen unter Umständen zu unterschiedlichen Ergebnissen führen, so entsteht auch auf dieser Ebene ein Kontingenzproblem: Wie kann man noch von einem Abstimmungsverfahren sagen, dass es die individuellen Präferenzen in angemessener Form berücksichtigt und zu einer kollektiven Präferenz bündelt, wenn es mehrere mehr oder weniger gleich guter und gleich schlechter Verfahren gibt, die möglicherweise zu unterschiedlichen Ergebnissen führen.

Zum Schluss sein noch darauf hingewiesen, dass es sich bei den hier beschriebenen Phänomenen nicht ausschließlich um ein Problem von Abstimmungen und Kollektiventscheidungen (auch wenn es dabei vielleicht häufiger auftritt), denn nach dem gleichen Muster kann man – wie zuvor (S. 29) schon einmal angedeutet – auch zyklische individuelle Präferenzen konstruieren. Insofern ist es ein Problem, das den Kern der Theorie betrifft. Dazu ein Beispiel: Eine Person steht vor der Wahl mit welchem ihrer drei Kollegen und Kolleginnen Peter, Lisa und Klaus sie gemeinsam an einem Projekt arbeiten möchte. Die drei Kollegen und Kolleginnen unterscheiden sich dabei hinsichtlich der drei Eigenschaften nett, fleißig und pünktlich. In der folgenden Tabelle ist die Rangfolge der Kollegen und Kolleginnen für jede dieser Eigenschaften angegeben:

	nett	fleißig	pünktlich
1.	Peter	Lisa	Klaus
2.	Lisa	Klaus	Peter
3.	Klaus	Peter	Lisa

Geht man danach, welcher Kollege bei mehr guten Eigenschaften besser ist als ein anderer (paarweiser Vergleich nach dem Condorcet-Verfahren), so ergibt sich auf ganz natürliche Weise die „zyklische“ Präferenzstruktur:  $Peter \succ Lisa \succ Klaus \succ Peter$ .

Das Muster der Verteilung individueller Präferenzen, das sich in beiden Tabellen wiederfindet, tritt in der Sozialwahltheorie ebenso wie in der Wahl- und Abstimmungstheorie sehr häufig auf. Viele „paradoxe“ Ergebnisse in diesen Theorien beruhen in der ein- oder anderen Weise auf diesem Muster, so auch das weiter unten folgende „Paradox des Liberalismus“.

### 2.1.2 Das sogenannte „Paradox des Liberalismus“

Nach diesem Einstieg gehen wir nun zunächst zu einem der einfacheren Beispiele der Sozialwahltheorie über, dem sogenannten „Paradox des Liberalismus“ von Amartya Sen (Kliemt and Lahno, 2005). Die Bezeichnung erscheint

Voraus-  
setzungen

– zumindest im Deutschen – ein wenig unglücklich, denn es handelt sich dabei eher um ein Paradox der Demokratie als des Liberalismus im engeren Sinne. Hinter dem Namen verbirgt sich jedenfalls Folgendes: Um faire Kollektiventscheidungen über eine Menge von Alternativen zu treffen, soll eine „Verfassung“ verabschiedet werden, die ein entsprechendes Entscheidungsverfahren vorgibt, das folgenden Bedingungen genügt:

1. *Minimale Fairness*<sup>3</sup> (Prärogativrecht): Jeder soll das Recht haben, die Kollektiventscheidung für mindestens ein Paar von Alternativen festzulegen. Wer über welches Paar von Alternativen entscheiden darf, wird in der Verfassung festgelegt. Die Bedingung der „minimalen Fairness“ garantiert jedem, nicht vollständig übergangen zu werden.
2. *Unbeschränkter Bereich*: Jedes beliebige individuelle Präferenzprofil ist zugelassen (sofern es die Bedingungen einer wohlgeformten Präferenzrelation erfüllt). Diese Bedingung besagt einerseits, dass die Individuen völlig frei sind, ihre persönlichen Präferenzen zu wählen, und andererseits, dass die gesuchte Entscheidungsverfahren der Möglichkeit beliebig verteilter individueller Präferenzen Rechnung tragen muss.
3. *Einstimmigkeit* oder auch „Pareto-Effizienz“: Wenn alle Individuen eine bestimmte Alternative einer anderen vorziehen, dann sollte auch nach dem Kollektiventscheidungsverfahren diese Alternative vor der anderen rangieren.<sup>4</sup>

Beweis

Allen drei Bedingungen kommt ein gewisser Grad von Selbstverständlichkeit zu, d.h. man ist leicht geneigt zu verlangen, dass jede einigermaßen faire und sinnvolle Entscheidungsverfahren mindestens diese drei Bedingungen erfüllt. Es lässt sich nun jedoch zeigen, dass es unmöglich ist, alle drei Bedingungen auf einmal zu erfüllen. Um das zu zeigen, gehen wir von dem einfachsten Fall aus, in dem wir es mit zwei Individuen und drei Alternativen zu tun haben. Die Individuen bezeichnen wir mit  $A$  und  $B$ , die Alternativen mit  $x, y, z$ . Nun soll in der „Verfassung“ festgeschrieben werden, wer über

<sup>3</sup>Zuweilen wird diese Bedingung auch als „Bedingung des minimalen Liberalismus“ bezeichnet (Kliemt and Lahno, 2005). Aber die Bezeichnung ist schon deshalb irreführend, weil „Liberalismus“ eigentlich meint, dass es bestimmte Dinge gibt, die überhaupt nicht kollektiv entschieden werden müssen, nicht aber, dass bei einem Kollektiventscheidungsverfahren jeder einmal zum Zuge kommen müsse.

<sup>4</sup>Da sie etwas leichter zu verstehen ist, wurde hier als Voraussetzung die *schwache* Pareto-Bedingung anstatt der sonst üblichen *starken* Pareto-Bedingung gewählt. Der Beweis lässt sich aber genauso mit der starken Pareto-Bedingung führen (siehe Aufgabe 3).



welches Paar von Alternativen entscheiden darf. Wir nehmen an, dass das Individuum  $A$  über  $y$  und  $z$  und Individuum  $B$  über  $x$  und  $z$  entscheiden darf, d.h. wenn  $P$  die Menge der Alternativen bezeichnet, über die ein Individuum die „Prärogative“ ausübt, dann gilt:

$$P_A = \{x, z\}$$

$$P_B = \{y, z\}$$

Die Unmöglichkeit eines Entscheidungsverfahrens, das alle drei Bedingungen erfüllt, ist dann bewiesen, wenn wir Präferenzen für  $A$  und  $B$  finden, mit denen keine eindeutige Kollektiventscheidung mehr getroffen werden kann. Dies ist aber für folgende Präferenzen der Fall:

$$A : \quad y \succ x \succ z$$

$$B : \quad z \succ y \succ x$$

Mit diesen Präferenzen kann keine der drei Alternativen als die beste gewählt werden, denn:

1. Aufgrund der Präferenzen von  $A$ , und da  $A$  die Prärogative über  $x$  und  $z$  ausübt, kann  $z$  nicht gewählt werden.
2. Aufgrund der Präferenzen von  $B$ , und da  $B$  die Prärogative über  $y$  und  $z$  ausübt, kann  $y$  nicht gewählt werden.
3. Aufgrund der Einstimmigkeitsbedingung und der Präferenzen beider, kann aber auch nicht  $x$  gewählt werden.

Damit ist gezeigt, dass es unmöglich ist, ein Entscheidungsverfahren zu finden, dass die Präferenzen von  $A$  und  $B$  unter Berücksichtigung der Fairness-, Unbeschränktheits- und Einstimmigkeitsbedingung auf kollektive Präferenzen abbilden kann, da keine der möglichen Alternativen in der kollektiven Präferenzordnung an erster Stelle auftauchen dürfte.

Die Gültigkeit des Beweises hängt nicht davon ab, welche Prärogativen man wählt (Übungsaufgabe 4). Es ist aber sehr wohl entscheidend für den Beweis, dass die Prärogativen im vorhinein festgelegt werden, d.h. bevor etwas über die Präferenzen der Individuen bekannt ist (Übungsaufgabe 5).

Beweistechnik

An dieser Stelle sei ein kleiner Einschub gestattet zu der Frage: Wie kommt man auf diese Lösung? Die Beweisführung gelingt nämlich nur, wenn man zuvor die Präferenzen der Individuen geschickt festlegt. Wie findet man aber heraus, welches die Präferenzen sind, mit denen sich der Beweis nachher richtig führen lässt? Nun, in diesem Fall sollte man versuchen, die Präferenzen ausgehend von den drei Bedingungen zu wählen (wobei die Bedingung des

unbestimmten Bereiches schon dadurch abgegolten ist, dass wir die Präferenzen frei wählen dürfen, und hier also nicht noch einmal in Betracht kommt). Dabei ist es hilfreich, wenn man mit der Einstimmigkeitsbedingung anfängt. Damit man aufgrund der Einstimmigkeitsbedingung eine Alternative ausschließen kann, müssen die Präferenzen beider Individuen auf jeden Fall bei einem Paar von Alternativen (hier  $x$  und  $y$ ) gleichgeordnet sein. So scheidet aufgrund der Einstimmigkeitsbedingung schon einmal eine Alternative aus. Die verbleibende Alternative ( $z$ ) muss nun so in die Präferenzen eingeordnet werden, dass mit Hilfe der Prärogative des einen Individuums, die bevorzugte der beiden anderen Alternativen ( $y$ ) ausfällt, und dass zugleich die verbleibende Alternative ( $z$ ) ausgeschlossen wird.

Geringe  
inhaltliche  
Bedeutung

Kann man aus diesem Beweis inhaltliche Schlussfolgerungen bezüglich der Demokratie bzw. der Möglichkeit und Fairness demokratischer Entscheidungsverfahren ziehen? Mit einiger Vorsicht kann wohl folgende Schlussfolgerung gezogen werden: Eine Idealvorstellung dergestalt, dass in der Demokratie den Interessen jedes Bürgers (ausgedrückt durch die Präferenzen) wenigstens eine gewisse Berücksichtigung (ausgedrückt durch die Prärogative) garantiert (unbeschränkter Bereich) werden könnte, lässt sich nicht unter allen Umständen (Effizienz- bzw. Einstimmigkeitsgebot) halten.

Wie man sieht – aber das ist ein Grundproblem des Ansatzes – sind inhaltlich nur relative schwache, d.h. nahe an der Grenze zur reinen Binsenweisheit liegende Schlussfolgerungen möglich. Denn, dass in der Demokratie nicht alle Interessen berücksichtigt werden (können), ist schon aus anderen, pragmatischen Gründen relativ offensichtlich. Zugleich ist aber jedem die Möglichkeit und damit auch die Chance gegeben, für die eigenen Interessen zu kämpfen. Dass diese Chancen höchst ungleich verteilt sind, stimmt leider ebenso, hängt aber weniger mit logisch-mathematischen Abbildungsproblemen als mit der innergesellschaftlichen Reichtums-, Macht- und Einkommensverteilung etc. zusammen.<sup>5</sup>

Aber auch wenn keine unmittelbaren starken demokratietheoretischen Schlussfolgerungen aus dem „Paradox des Liberalismus“ gezogen werden können, ist ein Verständnis der logischen Eigenschaften von Abstimmungs- bzw. Kollektiventscheidungsverfahren – neben den nicht minder wichtigen psychologischen Rahmenbedingungen – wichtig, wenn es um die Frage geht, welche Abstimmungsverfahren man für welchen Zweck heranziehen bzw. wie man sie gestalten sollte.

---

<sup>5</sup> Aufschlussreich hinsichtlich der Machtressourcenverteilung als Funktionsvoraussetzung der Demokratie ist die Zusammenfassung bei Schmidt (Schmidt, 2000, S. 438ff.).

### 2.1.3 Der „Klassiker“ der Sozialwahltheorie: Der Satz von Arrow

Ein historischer Vorläufer des sogenannten „Paradox des Liberalismus“ und recht eigentlich der Klassiker der Sozialwahltheorie ist allerdings der „Satz von Arrow“. Der Beweis des „Satzes von Arrow“ ist einiges komplizierter als das „Paradox“ des Liberalismus, sollte aber, da er im Grunde nur relativ elementare mathematische Mittel voraussetzt, dennoch verständlich sein. Um es so einfach wie möglich zu machen, wird der Beweis in drei Teilbeweise zerlegt, die wir Schritt für Schritt durchgehen werden.

*Interessierte können sich gerne auch den zweiten und dritten Beweis in diesem Skript durchlesen. Besonders der dritte Beweis sollte, da er recht ähnlich ist, nicht mehr allzu schwer verständlich sein, wenn man den ersten Beweis erst einmal begriffen hat!*

#### Das Theorem

Der Satz von Arrow zeigt – ähnlich wie Sens sog. „Paradox des Liberalismus“ – dass eine Abbildung individueller Präferenzen auf eine kollektive Präferenzordnung nicht mehr möglich ist, wenn man nur ein par „selbstverständliche“ Anforderungen an diese Abbildung stellt. Wenn wir dieses zunächst einmal mathematisch abstrakte Resultat auf demokratische Entscheidungsfindungsprozesse übertragen, dann besagt es, dass bestimmte normative Kriterien wie etwa 1) dass jeder eine faire Chance bekommen soll, 2) dass die Entscheidungsfindung effizient sein soll, 3) dass die Entscheidungsprozedur auch bei höchst unterschiedlichen Meinungen noch funktioniert, miteinander unvereinbar sein können. Da man dies den entsprechenden normativen Kriterien nicht unmittelbar ansieht, hat das Resultat schon einige Bedeutung, indem es uns auf einen möglichen Zielkonflikt aufmerksam macht. Wie bei beinahe allen Resultaten der Sozialwahltheorie muss man allerdings auch hier die Frage stellen, inwieweit die abstrakt-mathematische Formulierung die entsprechenden konkret-empirischen Zusammenhänge richtig erfasst.

Zum Anforderungskatalog, auf den sich der Satz von Arrow bezieht, gehören nun folgende Bedingungen:

Arrows Voraussetzungen

1. *Diktaturfreiheit*: Es dürfen sich nicht in jedem Fall (d.h. bei jedem möglichen Profil von individuellen Präferenzen) die Präferenzen von ein- und demselben Individuum durchsetzen.

Diese Bedingung ist vergleichsweise schwächer als die Bedingung der „minimalen Fairness“ im Falle des Paradoxes des Liberalismus, indem sie immer noch zulässt,

dass einzelne Individuen völlig übergangen werden, solange nicht alle bis auf ein Individuum übergangen werden.

2. *Unbeschränkter Bereich*: Jedes beliebige individuelle Präferenzprofil, das die Bedingungen einer wohlgeformten Präferenzrelation erfüllt, ist zugelassen.
3. *Einstimmigkeit* bzw. *Pareto-Effizienz*: Wenn alle Individuen eine bestimmte Alternative einer anderen vorziehen, dann sollte auch nach dem Kollektiventscheidungsverfahren diese Alternative der anderen vorgezogen werden.<sup>6</sup>
4. *Unabhängigkeit von dritten*<sup>7</sup> Alternativen bzw. *Paarweise Unabhängigkeit*: Die Anordnung, die das Kollektiventscheidungsverfahren zwei Alternativen zuweist, sollte allein von der Ordnung *dieser* beiden Alternativen in den Präferenzen der Individuen abhängen und nicht davon, wie andere Alternativen in den Präferenzen der Individuen eingeordnet sind.

Anders als bei der Pareto-Bedingung legt die Bedingung der Unabhängigkeit von dritten Alternativen nicht fest, welche kollektive Wahl getroffen werden soll, wenn unterschiedliche Individuen bezüglich bestimmter Alternativen übereinstimmen, sondern vielmehr, welche Wahl getroffen werden soll, wenn unterschiedliche Präferenzprofile bezüglich der Anordnung bestimmter Alternativen übereinstimmen. Dabei können die Individuen innerhalb der Präferenzordnungen diese Alternativen sehr wohl unterschiedlich anordnen (siehe dazu die Aufgaben 6 und 7).

Satz von  
Arrow

**Theorem (Satz von Arrow):** *Es gibt (bei zwei oder mehr Individuen und drei oder mehr zur Wahl stehenden Alternativen) kein Kollektiventscheidungsverfahren, das individuelle Präferenzordnungen so auf eine kollektive Präferenzordnung abbildet, dass die Bedingungen der Diktaturfreiheit, der Einstimmigkeit und der Unabhängigkeit von dritten Alternativen für alle denkbaren individuellen Präferenzordnungen erfüllt sind.*

entscheidende  
Mengen

Um den Beweis des Theorems vorzubereiten, führen wir zunächst zwei weitere Definitionen ein:

<sup>6</sup>Statt der schwachen Pareto-Bedingung kann man hier ebenso gut die starke Pareto-Bedingung einsetzen (siehe Aufgabe 3).

<sup>7</sup>Häufig wird diese Bedingung auch „Unabhängigkeit von *irrelevanten* Alternativen“ genannt. Wie bereits zuvor (Seite 43) an einigen Beispielen dargelegt, ist diese Bezeichnung irreführend, da dritte Alternativen in manchen Fällen sehr wohl und zu Recht einen Einfluss auf die Rangordnung eines Paares von Alternativen ausüben.

1. Eine Menge von Individuen ist *vollständig entscheidend* für  $x$  über  $y$ , wenn das Kollektiventscheidungsverfahren  $x \succ_K y$  liefert, sobald jedes Individuum aus dieser Menge  $x$  gegenüber  $y$  vorzieht.
2. Eine Menge von Individuen ist *beinahe entscheidend* für  $x$  über  $y$ , wenn das Kollektiventscheidungsverfahren  $x \succ_K y$  liefert, sobald alle Individuen aus dieser Menge  $x$  gegenüber  $y$  vorziehen *und* alle Individuen außerhalb dieser Menge  $y$  gegenüber  $x$  vorziehen.

Umgangssprachlich besagt die Definition also, dass eine Menge von Individuen „beinahe entscheidend“ ist, wenn sie nur in dem Extremfall maximaler Opposition von außerhalb entscheidend ist, aber nicht in anderen Fällen. Es gilt daher, dass eine Menge von Individuen, die „entscheidend“ ist, immer auch „beinahe entscheidend“ ist, aber nicht umgekehrt.

Anmerkungen:

- (a) Wenn eine Menge von Individuen beinahe (bzw. vollständig) entscheidend für  $x$  über  $y$  ist, so muss noch lange nicht gelten, dass sie auch beinahe (bzw. vollständig) entscheidend für  $y$  über  $x$  ist.
- (b) Für jede Menge von Individuen und jedes Paar von Alternativen gibt es wenigstens eine beinahe (bzw. eine vollständig) entscheidende Menge. Aufgrund der Einstimmigkeitsbedingung ist für jedes Paar von Alternativen nämlich die Menge aller Individuen eine zugleich beinahe als auch vollständig entscheidende Menge, denn, sobald alle Individuen  $x$  der Alternative  $y$  vorziehen, fordert die Einstimmigkeitsbedingung, dass auch kollektiv  $x \succ_K y$  gilt.
- (c) Wenn eine Menge, die nur ein Individuum enthält, vollständig entscheidend sowohl für  $x$  über  $y$  als auch für  $y$  über  $x$  ist, dann soll das Individuum „Diktator“ für die Alternative  $x$  oder  $y$  heißen.

Existenz  
mindestens  
einer  
entscheidenden  
Menge

## Der Beweis des Theorems

Der wahrscheinlich einfachste Beweis, der sich für den Satz von Arrow finden lässt, folgt weitgehend Dennis Mueller (Mueller, 2003, S. 583f.), der sich für seine Skizze wiederum auf William Vickrey stützt. Der Satz von Arrow wird dabei über drei Zwischenschritte (Lemmata) bewiesen:

Beweis nach  
Vickrey

Grobstruktur  
des Beweises

1. Lemma: Sei  $D$  eine Teilmenge von Individuen, die beinahe entscheidend für  $x$  über  $y$  ist, dann ist  $D$  beinahe entscheidend für alle Alternativen.

2. Lemma: Sei  $D$  beinahe entscheidend für alle Alternativen, dann enthält  $D$  ein Individuum  $J$ , das (bereits allein) beinahe entscheidend für alle Alternativen ist.
3. Lemma: Ist ein Individuum  $J$  beinahe entscheidend für alle Alternativen, dann ist  $J$  auch *vollständig* entscheidend für alle Alternativen (und damit Diktator für alle Alternativen).

**Beweis von Lemma 1** Sei  $D$  eine Teilmenge von Individuen, die beinahe entscheidend für  $x$  über  $y$  ist, dann ist  $D$  beinahe entscheidend für alle Alternativen.

1. Sei  $D$  eine Menge von Individuen, die beinahe entscheidend für  $x$  über  $y$  ist, wobei  $x$  und  $y$  irgendein Paar von Alternativen ist. (*Anmerkung 2b auf Seite 93*)
  1. Teil (*Ersetzbarkeit von rechts*)
2. Annahme: Für alle Individuen in  $D$  und eine beliebige dritte Alternative  $u$  gelte  $x \succ y \succ u$  und für alle anderen Individuen  $y \succ u \succ x$ . (*Unbeschränkter Bereich*)
3. Dann gilt für das Kollektiv:  $x \succ_K y$ . ( *$D$  ist nach 1. beinahe entscheidend*)
4. Und es gilt für das Kollektiv:  $y \succ_K u$ . (*Einstimmigkeit iVm 2.*)
5. Und es gilt für das Kollektiv:  $x \succ_K u$ . (*Transitivität iVm 3. und 4.*)
6. Für das Kollektiv muss  $x \succ_K u$  unabhängig davon gelten, wie die anderen Alternativen, einschließlich  $y$ , von den Individuen eingeordnet werden. (*Unabhängigkeit von dritten Alternativen*)
7. Also ist  $D$  beinahe entscheidend für  $x$  über  $u$  (für jedes beliebige  $u$ , das nicht identisch mit  $x$  oder  $y$  ist). (*Definition beinahe entscheidender Mengen iVm 2., 5. und 6.*)

*Damit ist der erste Teil des Beweises von Lemma 1 abgeschlossen. Was bis hierher bewiesen wurde ist: Wenn eine Menge  $D$  für  $x \succ_K y$  entscheidend ist, dann dürfen wir in dieser Formel den rechten Term (also das  $y$ ) durch jede beliebige dritte Alternative ( $u$ ) ersetzen, und die Aussage stimmt immer noch. Nun wird noch gezeigt, dass das für den linken Term (also das  $x$ ) ganz genauso gilt.*

2. Teil (Ersetzbarkeit von links)

8. Nun nehme man anstelle der unter Punkt 2 getroffenen Annahme für  $D$  die Präferenzen  $u' \succ x \succ y$  an, und für alle anderen Individuen  $y \succ u' \succ x$ . Dabei kann  $u'$  jede beliebige Alternative außer  $x$  und  $y$  sein. (*Unbeschränkter Bereich*)
9. Dann gilt für das Kollektiv:  $x \succ_K y$ . ( *$D$  ist nach 1. beinahe entscheidend*)
10. Und es gilt für das Kollektiv:  $u' \succ_K x$ . (*Einstimmigkeit iVm 8.*)
11. Und es gilt für das Kollektiv:  $u' \succ_K y$ . (*Transitivität iVm 9. und 10.*)
12. Für das Kollektiv muss  $u' \succ_K y$  unabhängig davon gelten, wie die anderen Alternativen, einschließlich  $x$ , von den Individuen eingeordnet werden. (*Unabhängigkeit von dritten Alternativen*)
13. Dann gilt auch:  $D$  ist beinahe entscheidend für  $u' \succ_K y$  (wobei  $u'$  eine beliebige Alternative außer  $x$  und  $y$  ist). (*Definition beinahe entscheidender Mengen iVm 2., 11. und 12.*)

*Damit ist gezeigt, dass wir auch den linken Term (das  $x$ ) in der Aussage, dass  $D$  eine entscheidende Menge für  $x \succ_K y$  ist, durch eine beliebige dritte Alternative ( $u'$ ) ersetzen dürfen, ohne dass die Aussage falsch wird. Zusammen mit dem Resultat vom ersten Teil des Beweises bedeutet das, dass wir in der Formel  $x$  und  $y$  beliebig durch andere Alternativen ersetzen dürfen (siehe Übungsaufgabe 8).*

*Schluss*

14. Aber dann ist  $D$  beinahe entscheidend für alle Paare von Alternativen. (*Sukzessives Ersetzen von  $u$  im 1. Teil und von  $u'$  im 2. Teil des Beweises*)

**Beweis von Lemma 2** Sei  $D$  beinahe entscheidend für alle Alternativen, dann enthält  $D$  ein Individuum, das bereits allein beinahe entscheidend für alle Alternativen ist.

1. Sei  $D$  eine Menge von Individuen, die beinahe entscheidend für alle Alternativen ist. (*Anmerkung 2b auf Seite 93 iVm Lemma 1*)

2. Wenn  $D$  aus nur einem Individuum besteht, dann gilt die Folgerung von Lemma 2 bereits. (*offensichtlich*)
3. Besteht  $D$  aus zwei oder mehr Individuen, dann kann  $D$  in zwei nicht-leere, disjunkte Teilmengen  $A$  und  $B$  aufgeteilt werden. (*elementare Mengentheorie*)
4. Angenommen, für alle Individuen aus  $A$  gelte  $x \succ y \succ u$ , für Individuen aus  $B$  gelte  $y \succ u \succ x$  und für alle anderen Individuen gelte  $u \succ x \succ y$ . (*Unbeschränkter Bereich*)
5. Für das Kollektiv gilt  $y \succ_K u$ . ( $A \cup B = D$  (3.) und  $D$  ist beinahe entscheidend (1.) iVm mit den angenommenen Präferenzen (4.))

*Fallunterscheidung: 1. Fall*

6. Falls für das Kollektiv  $y \succ_K x$  gilt, dann ist  $B$  beinahe entscheidend für  $y$  über  $x$ . (*Definition von „beinahe entscheidend“ iVm mit den Präferenzen (4.) und der Unabhängigkeit von dritten Alternativen*)
7. Aber dann ist  $B$  auch beinahe entscheidend für alle Alternativen. (*Lemma 1*)

*Fallunterscheidung: 2. Fall*

8. Falls für das Kollektiv  $x \succ_K y$  gilt, dann gilt für das Kollektiv auch  $x \succ_K u$ . (*Transitivität iVm 5.*)
9. Aber dann ist  $A$  beinahe entscheidend für  $x$  über  $u$ . (*Definition von „beinahe entscheidend“ iVm mit den Präferenzen (4.) und der Unabhängigkeit von dritten Alternativen*)
10. Und  $A$  ist auch beinahe entscheidend für jede andere Alternative. (*Lemma 1*)

*Ende der Fallunterscheidung*

11. Eine echte Teilmenge von  $D$  (nämlich entweder  $A$  oder  $B$ ) ist beinahe entscheidend für alle Alternativen. (*Zusammenführung der Konsequenzen beider Fälle der Fallunterscheidung*)



12. Es gibt eine Teilmenge von  $D$ , die nur ein Individuum enthält, das für alle Alternativen beinahe entscheidend ist. (*Wiederholung der Schritte 2.-11. für diejenige echte Teilmenge von  $D$ , die beinahe entscheidend für alle Alternativen ist, solange, bis sie nur noch ein Individuum enthält.*)

**Beweis von Lemma 3** Ist ein Individuum beinahe entscheidend für alle Alternativen, dann ist dasselbe Individuum auch *vollständig* entscheidend für alle Alternativen.

1. Sei  $J$  das Individuum, das beinahe entscheidend für alle Alternativen ist. (*Anmerkung 2b auf Seite 93 iVm Lemma 1 und Lemma 2*)
2. Angenommen, für  $J$  gelten die Präferenzen  $x \succ y \succ u$  und für alle anderen Individuen gelte sowohl  $y \succ x$  als auch  $y \succ u$ , wobei für die Ordnung von  $x$  und  $u$  bei den anderen Individuen beliebiges gelten kann. (*Unbeschränkter Bereich*)
3. Dann gilt für das Kollektiv  $x \succ_K y$ . ( *$J$  ist beinahe entscheidend für alle Alternativen, also auch insbesondere für  $x \succ_K y$  iVm 2.*)
4. Und es gilt für das Kollektiv  $y \succ_K u$ . (*Einstimmigkeit iVm 2.*)
5. Dann gilt für das Kollektiv aber auch  $x \succ_K u$ . (*Transitivität*)
6. Für das Kollektiv muss  $x \succ_K u$  unabhängig davon gelten, wie die anderen Alternativen, einschließlich  $y$ , von den Individuen eingeordnet werden. (*Unabhängigkeit von dritten Alternativen*)
7. Dann ist  $J$  vollständig entscheidend für  $x \succ_K u$ . (*Definition von „vollständig entscheidend“ iVm 2., insbesondere da unter 2. die Ordnung von  $x$  und  $u$  für alle Individuen außer  $x$  offen gelassen wurde.*)
8. In den Schritten 2. bis 7. wurde gezeigt, dass  $J$  vollständig entscheidend für  $x \succ_K u$  ist – bei beliebig gewählten, aber bestimmten  $x, y, u$ . Um nun von irgendeinem Paar  $v, w$  zu zeigen, dass  $J$  vollständig entscheidend für  $v \succ_K w$  ist, ersetze man im 2. Beweisschritt des Lemmas  $x$  durch  $v$ ,  $u$  durch  $w$  und  $y$  durch eine beliebige Alternative außer  $v$  und  $w$  und gehe dann die Schritte 2. bis 7. für die eingesetzten Alternativen durch.
9.  $J$  ist *vollständig* entscheidend für alle Alternativen. (*Anwendung des letzten Schrittes auf jedes mögliche Paar von Alternativen.*)

Aus der Voraussetzung, dass es immer eine Teilmenge  $D$  und ein Paar von Alternativen  $x$  und  $y$  gibt, für die  $D$  beinahe entscheidend ist (siehe Anmerkung 2b auf Seite 93) ergibt sich in Verbindung mit Lemma 1, 2 und 3, dass es ein Individuum  $J$  gibt, dass *vollständig entscheidend* für alle Alternativen ist. Da dies dem Prinzip der *Diktaturfreiheit* widerspricht, ist es nicht möglich die Voraussetzungen des unbeschränkten Bereichs, der Einstimmigkeit, der Unabhängigkeit von dritten Alternativen und der Diktaturfreiheit gleichzeitig zu erfüllen. Damit ist der Satz von Arrow bewiesen.

Beweis nach  
Geanakoplos

### Ein alternativer Beweis

Dasselbe Theorem kann auch auf andere Weise bewiesen werden. Zum tieferen Verständnis und weil dieser zweite Beweis etwas andere Beweistechniken einsetzt, sei er hier auch aufgeführt. Der Beweis stammt von John Geanakoplos (Geanakoplos, 2001) und läuft folgendermaßen:

#### Teil 1

1. Gegeben sei eine Menge von mindestens drei Alternativen, die mit Kleinbuchstaben  $x, y, z, \dots$  bezeichnet werden.
2. Wenn alle Individuen  $y$  am wenigstens schätzen, dann muss  $y$  auf Grund des *Einstimmigkeitsprinzips* auch die schlechteste kollektive Wahl sein.  
Ein Präferenzprofil, bei dem alle Individuen  $y$  als die schlechteste Alternative bewerten, nennen wir ein „Profil vom Typ 1“ oder kürzer: *Profil 1*.<sup>8</sup>

3. Wenn andererseits alle Individuen  $y$  am meisten schätzen, dann muss  $y$  ebenfalls auf Grund des Einstimmigkeitsprinzips die beste kollektive Wahl sein.

Ein Präferenzprofil, bei dem alle Individuen  $y$  als die beste Alternative bewerten, nennen wir ein „Profil vom Typ 2“ oder kürzer: *Profil 2*.

4. Wir betrachten nun einen Übergang von *Profil 1* zu *Profil 2*, bei dem die Individuen ausgehend von einem Präferenzprofil vom Typ 1 nacheinander die Alternative  $y$  vom letzten auf den ersten Platz rücken. Die Reihenfolge, in der die Individuen diese Änderung vornehmen, ist

---

<sup>8</sup>Die abgekürzte Benennung, die suggeriert, es handele sich dabei nur um ein einzelnes Präferenzprofil und nicht vielmehr um eine ganze Gruppe von Präferenzprofilen, ist – wie sich aus dem Folgenden ergibt – durch die Bedingung der Unabhängigkeit von dritten Alternativen gerechtfertigt.

beliebig wählbar, stehe danach aber für den Rest des Beweises fest. Der „Übergang“ besteht also aus einer Anzahl von Schritten, die der Anzahl der Individuen entspricht, auf einem Pfad von Präferenzprofilen. Der Pfad ist nicht eindeutig,<sup>9</sup> da in jedem Schritt nur die Position von  $y$  für alle Individuen festgelegt ist, nicht aber die der anderen Alternativen.

Für diesen Übergang gilt:

5. Bei dem Individuum, bei dem  $y$  den letzten Platz in der kollektiven Präferenzordnung verlässt (es sei das „zentrale Individuum“ oder auch das  $n$ -te Individuum genannt<sup>10</sup>), rückt  $y$  in der kollektiven Präferenzordnung vom letzten Platz sogleich auf den ersten Platz. Es gibt keine Zwischenstufen, denn sonst gäbe es ein Profil, bei dem alle Individuen bis zum  $n$ -ten Individuum  $y$  an die Spitze stellen, alle Individuen ab dem  $n$ -ten  $y$  aber (noch) ans Ende stellen, während  $y$  in der kollektiven Präferenzordnung zwischen zwei Alternativen steht, die  $x$  und  $z$  genannt seien, so dass  $x \succ_K y \succ_K z$ . Nun könnten aber alle Individuen ihre Präferenzen so abändern, dass  $z$  vor  $x$  eingeordnet wird, ohne dass dadurch das relative Verhältnis von  $z$  zu  $y$  bzw. von  $x$  zu  $y$  in den individuellen Präferenzen geändert wird, da in den individuellen Präferenzen  $y$  entweder ganz am Anfang oder ganz am Ende, d.h. entweder vor  $x$  und  $z$  oder nach  $x$  und  $z$  kommt. Aufgrund des Einstimmigkeitsprinzips müsste dann aber gelten  $z \succ_K x$ , und da zuvor angenommen wurde  $x \succ_K y$ , wegen der Transitivität auch  $z \succ_K y$ , was im Widerspruch zur Unabhängigkeit von dritten Alternativen steht.
6. Welches Individuum das *zentrale Individuum* ist, ist unabhängig vom gewählten Pfad. Denn die Präferenzen der Individuen stimmen hinsichtlich der relativen Ordnung von  $y$  zu allen anderen Alternativen beim gleichen Schritt zwischen sämtlichen möglichen Pfaden überein. Wegen der Unabhängigkeit von dritten Alternativen, muss  $y$  dann aber auch innerhalb der kollektiven Präferenzen beim gleichen Schritt an derselben Position (Anfang oder Ende) stehen.
7. Das  $n$ -te Individuum ist auch das *zentrale Individuum* bezüglich jeder Teilmenge von Alternativen, die  $y$  enthält, denn jeder mögliche

---

<sup>9</sup>Eindeutig ist wohl aber die Reihenfolge der Individuen beim „Übergang“ (zumindest an dieser Stelle des Beweises). Der Pfad ist also nicht zu verwechseln mit der Folge der Individuen sondern stellt, gegeben eine bestimmte festgelegte Folge von Individuen, die Folge der Präferenzprofile dar, die entsteht, wenn die Individuen nach einander ihre Präferenzen auf die beschriebene Weise ändern.

<sup>10</sup>Dabei steht  $n$  für die Anzahl der Schritte bei vorgegebenem Übergang (Punkt 4.), bis das „zentrale Individuum“ erreicht ist.

Pfad bei allen Alternativen ist auch ein möglicher Pfad, wenn die Betrachtung auf eine Teilmenge von Alternativen beschränkt wird. Da die Eigenschaft, zentrales Individuum zu sein, pfadunabhängig ist (siehe den vorhergehenden Punkt), muss das zentrale Individuum für die Teilmenge dasselbe sein.

## Teil 2

1. Man betrachte nun die Folge von Individuen, in der alle bis zum  $n$ -ten Individuum  $y$  an die erste Position setzen, alle ab dem  $n$ -ten Individuum  $y$  an die letzte Position setzen, während das  $n$ -te Individuum  $y$  nach einer Alternative  $x$  und vor einer Alternative  $z$  einordnet, also  $x \succ_n y \succ_n z$ .<sup>11</sup> (Ein Präferenzprofil, dass damit übereinstimmt nennen wir Profil vom Typ 3 oder einfach *Profil 3*).
2. Beschränkt man die Betrachtung auf alle Alternativen  $\succeq_n y$ , so zeigt sich, da das  $n$ -te Individuum zentrales Individuum ist, dass für die kollektiven Präferenzen  $x \succ_K y$  gelten muss.
3. Beschränkt man umgekehrt die Betrachtung auf alle Alternativen  $\preceq_n z$ , so zeigt sich aus demselben Grund, dass die kollektive Präferenz  $y \succ_K z$  gelten muss.
4. Aufgrund der Transitivität folgt aus  $x \succ_K y$  und  $y \succ_K z$ , dass  $x \succ_K z$  gilt, und zwar für alle Profile vom Typ 3.
5. Wegen der Unabhängigkeit von dritten Alternativen muss  $x \succ_K z$  unabhängig davon gelten, wie die Individuen  $y$  zu  $x$  und  $z$  einordnen. Damit gilt  $x \succ_K z$  aber genau dann, wenn das zentrale Individuum  $x \succ_n z$  festlegt.<sup>12</sup> M.a.W.: Das „zentrale Individuum“ ist entscheidend für  $x$  über  $z$ .<sup>13</sup>

---

<sup>11</sup>Das Suffix „n“ bei  $\succ_n$  deutet an, dass es sich hier um die Präferenzen des  $n$ -ten Individuums handelt.

<sup>12</sup>Anmerkung: Bis zu dieser Stelle spielte die Reihenfolge der Individuen beim „Übergang“ (siehe Teil 1 des Beweises) noch eine Rolle. Dieses Resultat ist aber unabhängig von der beim Übergang gewählten Reihenfolge.

<sup>13</sup>Zur Erinnerung: Damit, dass das „zentrale Individuum“ entscheidend für  $x$  über  $z$  (in dieser Reihenfolge!) ist, ist noch nicht gesagt, dass das „zentrale Individuum“ auch entscheidend für  $z$  über  $x$  (umgekehrte Reihenfolge!) ist. Das wird erst im folgenden Schritt gezeigt. Und erst dann kann man auch sagen, dass das zentrale Individuum insgesamt Diktator für das Alternativenpaar  $x, z$  ist.

6. Durch Vertauschen von  $z$  und  $x$  in den Schritten 1.-5. erhält weiterhin, dass auch umgekehrt  $z \succ_K x \Leftrightarrow z \succ_n x$ . M.a.W.: Das „zentrale Individuum“ ist Diktator für das Paar von Alternativen  $x, z$ .

### Teil 3

1. Entsprechend des bisherigen Beweisgangs können wir zeigen, dass es nicht nur für  $x$  und  $z$ , sondern für jedes Paar von Alternativen *einen* Diktator gibt. Zu zeigen ist noch, dass es sich dabei jedesmal um ein- und denselben Diktator handelt.
2. Es gibt also für die Alternativen  $x$  und  $y$ ,  $y$  und  $z$  jeweils<sup>14</sup> einen Diktator.
3. Dann kann aber kein dritter Diktator allein über  $x$  und  $z$  entscheiden, denn wenn der erste Diktator  $x \succ_K y$  festsetzt und der zweite  $y \succ_K z$ , dann ist der dritte wegen der Transitivität nicht mehr frei  $x \prec_K z$  festzulegen. Also muss der dritte Diktator identisch mit einem der ersten beiden Diktatoren sein.
4. Ist der dritte Diktator aber identisch mit dem ersten, dann kann der erste Diktator über  $x$  und  $y$  und über  $x$  und  $z$  entscheiden. Wenn der erste Diktator nun aber  $y \succ_K x \succ_K z$  und damit auf Grund der Transitivität  $y \succ_K z$  bestimmt, dann ist der zweite nicht mehr frei,  $z \succ_K x$  fest zu setzen. Also muss der erste Diktator auch identisch mit dem zweiten sein.
5. Da  $x, y$  und  $z$  beliebig gewählt wurden, gibt es für jedes Tripel von Alternativen genau einen Diktator. Dann gibt es aber überhaupt nur einen Diktator, denn jeder Diktator, der über ein Tripel entscheidet, in dem zwei der Alternativen  $x, y$  und  $z$  vorkommen, muss mit dem Diktator über  $x, y$  und  $z$  identisch sein (nur einer von beiden kann ja über dieses Paar entscheiden). Für jede beliebige Alternative  $u$  außer  $x, y, z$ , muss aber der Diktator über  $x, y, u$  identisch mit dem von  $x, y, z$  sein. Also ist der Diktator von  $x, y, z$ , Diktator für alle Alternativen.

Damit ist bewiesen, dass es unter den Bedingungen der Unabhängigkeit von dritten Alternativen, des unbeschränkten Bereichs und der Einstimmigkeit (Pareto-Effizienz) bei drei oder mehr Alternativen immer einen Diktator gibt. Die Bedingung der Diktatorfreiheit ist also nicht mehr erfüllbar, wenn die drei anderen Bedingungen erfüllt sind.

---

<sup>14</sup>An dieser Stelle ist noch nicht klar, dass es ein- und derselbe ist.

### Ein dritter Beweis

Der folgende Beweis stammt aus dem Buch von Resnik (Resnik, 2000, S. 186ff.). Der Beweis ähnelt sehr stark dem ersten hier vorgestellten Beweis. Nur wird diesmal nicht zuerst gezeigt, dass es eine Teilmenge von Individuen gibt, die beinahe entscheidend für alle Alternativen ist und dann, dass sie tatsächlich nur aus einem Individuum besteht. Sondern es wird zuerst gezeigt, dass es ein Individuum gibt, dass für eine Alternative beinahe entscheidend ist, und dann, dass daraus folgt, dass dieses Individuum für alle Alternativen nicht nur beinahe sondern vollständig entscheidend ist. Die einzelnen Beweisschritte sind aber zum Teil ähnlich wie beim ersten Beweis, so dass die Lektüre des zweiten Beweises gut zur Übung und zum besseren Verständnis dienen kann.

Zunächst wird folgendes Lemma bewiesen:

**Lemma 1:** *Es existiert immer ein Individuum, das für irgendein Paar von Alternativen beinahe entscheidend ist.*

*Beweis:* Wie oben angemerkt existieren „entscheidende“ Mengen für jedes Paar von Alternativen. Da jede „entscheidende“ Menge immer auch „beinahe entscheidend“ ist, existieren für jedes Paar von Alternativen auch beinahe „entscheidende“ Mengen.

Wir setzen voraus, dass die Menge der Individuen und Alternativen endlich ist. Dann existiert wenigstens eine „beinahe entscheidende“ Menge, die keine echte Teilmenge enthält, die „beinahe entscheidende“ Menge wäre, denn: Man beginne mit irgend einer beliebigen „beinahe entscheidenden“ Menge. Hat diese Menge noch (nicht-leere) Teilmengen, die „beinahe entscheidende“ Mengen sind, dann wähle man irgend eine dieser „beinahe entscheidenden“ Teilmengen und stelle für diese Teilmenge dieselbe Untersuchung an, solange bis man bei einer Menge angekommen ist, die keine echten Teilmengen mehr enthält, die ihrerseits „beinahe entscheidende“ Mengen irgendeines Paares von Alternativen sind.

Wir verfügen damit über eine „minimale Menge“, die „beinahe entscheidend“ bezüglich eines bestimmten Paares von Alternativen ist. Wenn wir zeigen können, dass diese „minimale Menge“ nur noch ein einziges Individuum enthält, dann haben wir das Lemma bewiesen. Dazu kann ein Widerspruchsbeweis geführt werden. Wir nehmen also an, es gäbe eine entsprechende „minimale beinahe entscheidende Menge“, die mehrere Individuen enthält und zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt.

Angenommen also,  $M$  sei eine „minimale beinahe entscheidende Menge“ für die Alternative  $x$  über  $y$ , die mehrere Individuen enthält. Man betrachte

ein beliebiges Individuum  $J$  aus der Menge  $M$ . Da die Menge  $M$  mehr Individuen als nur  $J$  enthält, und da möglicherweise noch ein „Rest“ von Individuen existiert, die nicht zu  $M$  gehören, kann man folgende drei unterschiedlichen Gruppierungen betrachten: 1) Die Menge, die nur aus dem Individuum  $J$  besteht. 2) Die Menge, die aus den Individuen von  $M$  ohne  $J$  besteht, kurz:  $M - J$ . 3) Der „Rest“, d.h. alle Individuen, die nicht zu  $M$  gehören.

Da jedes beliebige Präferenzprofil zugelassen ist („unbeschränkter Bereich“) und sich die Eigenschaft eine (minimale) „beinahe entscheidende“ Menge zu sein auf alle Präferenzprofile bezieht, muss sie sich auch bei jedem beliebigen einzelnen Präferenzprofil bewähren. Man nehme an, dass es mindestens drei Güter gibt und betrachte nun folgendes Präferenzprofil:

$J$	$M - J$	Rest
$z$	$x$	$y$
$x$	$y$	$z$
$y$	$z$	$x$

Quelle: (Resnik, 2000, S. 188)

Da  $M$  eine „beinahe entscheidende“ Menge für  $x$  über  $y$  ist und in diesem Präferenzprofil für alle Mitglieder von  $M$  gilt:  $x \succ y$ , und alle Nicht-Mitglieder gilt:  $y \succ x$ , so muss die Wohlfahrtsfunktion diesem Präferenzprofil kollektive Präferenzen zuordnen, bei denen  $x \succ y$  gilt. Darüber hinaus muss die Wohlfahrtsfunktion natürlich auch festlegen, welche Beziehung ( $\succ$ ,  $\prec$  oder  $\sim$ ) zwischen  $x$  und  $z$  zu gelten hat. Wir betrachten die drei Möglichkeiten im Einzelnen, und zeigen, dass jede davon zu einem Widerspruch führt. Dabei ist zu beachten, dass wir nicht ausgeschlossen haben, dass die Menge „Rest“ leer sein kann. Die folgenden Argumente funktionieren aber (wovon man sich leicht überzeugen kann) auch in dem Fall, dass die „Rest“-Gruppe leer ist.

1. Angenommen nach der Wohlfahrtsfunktion gilt für dieses Präferenzprofil  $x \succ z$ . Dann muss die Wohlfahrtsfunktion nach der Bedingung der Unabhängigkeit von dritten Alternativen  $x \succ z$  auch für alle anderen Präferenzprofile liefern, nach denen  $x$  und  $z$  für jedes Individuum in derselben Weise relativ zueinander geordnet sind wie in dem gegebenen Präferenzprofil. Damit liefert die Wohlfahrtsfunktion aber immer  $x \succ z$ , wenn für alle Individuen in  $M - J$  gilt  $x \succ z$  und für alle Individuen, die nicht in  $M - J$  enthalten sind  $z \succ x$ . Damit ist  $M - J$  aber „beinahe entscheidende“ Menge für  $x$  über  $z$ . Nach der Konstruktion von  $M$  hätte  $M$  als „minimale beinahe entscheidende Menge“ (für  $x$

über  $y$ ) aber keine Teilmenge mehr enthalten dürfen, die noch „beinahe entscheidende“ Menge *irgendeines* Paares von Alternativen ist. Also liegt hier ein Widerspruch vor, so dass die Möglichkeit, dass die Wohlfahrtsfunktion dem oben stehenden Präferenzprofil kollektive Präferenzen zuordnet, die  $x \succ z$  enthalten, ausgeschlossen ist.

2. Angenommen, die Wohlfahrtsfunktion legt für dieses Präferenzprofil  $x \sim z$  fest. Dann ergibt sich, da bereits  $x \succ y$  gilt, dass auch  $z \succ y$ . Da  $J$  aber  $z$  gegenüber  $y$  vorzieht, während alle anderen Individuen  $y$  gegenüber  $z$  vorziehen, wäre nach dem gleichen Argument wie im 1. Fall  $J$  beinahe entscheidend für die Alternative  $z$  über  $y$ , was ebenfalls der Minimalität von  $M$  widerspricht. Damit scheidet die zweite Möglichkeit auch aus.
3. Angenommen, die Wohlfahrtsfunktion liefert  $z \succ x$ . Dann gilt wegen  $x \succ y$  und der Transitivität der Präferenzrelation auch  $z \succ y$ . Dann liegt aber wiederum der Fall vor, dass bei dem oben angegebenen Präferenzprofil für  $J$  gilt:  $z \succ y$ , aber für alle anderen Individuen:  $y \succ z$ , woraus sich mit Hilfe der Bedingung der Unabhängigkeit von dritten Alternativen wiederum ergibt, dass  $J$  „beinahe entscheidend“ für  $z \succ y$  ist, im Widerspruch zur Minimalität von  $M$ . Auch diese Möglichkeit scheidet aus.

Da alle Möglichkeiten zum Widerspruch führen, kann die Wohlfahrtsfunktion die individuellen Präferenzen nicht auf kollektive Präferenzen abbilden, sofern die minimale „beinahe entscheidende“ Menge  $M$  noch mehr als ein Individuum enthält.

Das erste Lemma scheint alleine noch nicht viel zu besagen, denn von dem Individuum, aus dem die Menge  $M$  am Ende besteht, ist zunächst nur bewiesen, dass es lediglich beinahe entscheidend ist, und auch das nur für ein Paar von Alternativen. Ein zweites Lemma zeigt aber, dass weit mehr dahinter steckt:

**Lemma 2:** *Ein Individuum, das für irgendein Paar von Alternativen beinahe entscheidend ist, ist entscheidend für jedes Paar von Alternativen.*

*Beweis:* Wir nehmen an, dass das Individuum  $J$  beinahe entscheidend für  $x$  über  $y$  ist. Es muss nun gezeigt werden, dass es dann auch entscheidend (und zwar nicht bloß *beinahe* entscheidend!) für alle Paare von Alternativen ist. Dies ist dann bewiesen, wenn wir zwei weitere Alternativen  $a$  und  $b$  in die Betrachtung einbeziehen und beweisen können, dass  $J$  in folgenden sieben



Fällen entscheidend ist: 1)  $x$  über  $y$ ; 2)  $y$  über  $x$ ; 3)  $x$  über  $a$ ; 4)  $a$  über  $x$ ; 5)  $y$  über  $a$ ; 6)  $a$  über  $y$ ; 7)  $a$  über  $b$ .

Da  $a$  und  $b$  beliebig wählbar sind, schließt der Beweis automatisch („ohne Beschränkung der Allgemeinheit“) alle weiteren Alternativen mit ein, die es außer  $x, y, a$  und  $b$  noch geben könnte. Gibt es außer  $x$  und  $y$  nur noch eine oder gar keine weiteren Alternativen, dann fallen nur einige der betrachteten Fälle weg, und der Beweis gilt trotzdem. Aus Gründen der Konvenienz werden in dem folgenden Beweis die Fälle in einer anderen Reihenfolge behandelt (vgl. (Resnik, 2000, S.190/191)). Nun zu den Fällen im Einzelnen:

1. Fall  $x$  über  $a$ : Wir betrachten das Präferenzprofil, in dem  $J$  die Alternativen  $x, y$  und  $a$  in der Reihenfolge  $x \succ y \succ a$  ordnet, und in denen die anderen Individuen die Alternative  $y$  sowohl  $x$  als auch  $a$  vorziehen, wobei zwischen  $x$  und  $a$  jede mögliche Reihenfolge zugelassen sei.

Da  $J$  nach Voraussetzung beinahe entscheidend für  $x$  über  $y$  ist, muss die Wohlfahrtsfunktion bei einem solchen Profil  $x \succ y$  liefern. Da aber ebenfalls für alle Individuen  $y \succ a$  gilt, muss auf Grund der Bedingung der Pareto-Effizienz auch die Sozialwahlfunktion  $y \succ a$  für ein derartiges Präferenzprofil liefern. Da aber schon  $x \succ y$  gilt, liefert die Sozialwahlfunktion aufgrund der Transitivität von Präferenzen auch  $x \succ a$ . Auf Grund der Bedingung der dritten Alternativen gilt aber, dass die Wohlfahrtsfunktion  $x \succ a$  für alle Präferenzprofile liefern muss, in denen  $x$  und  $a$  in derselben Weise relativ zueinander geordnet sind, wie in dem betrachteten Beispiel. In dem Beispiel hat  $J$  aber  $x$  vor  $a$  eingeordnet, während bei allen anderen Individuen die Ordnung beliebig war. Das bedeutet aber, dass die Wohlfahrtsfunktion  $x \succ a$  liefert, sobald  $J$  die Ordnung  $x \succ a$  festlegt. Damit ist  $J$  entscheidend (nicht bloß nahezu entscheidend!) für  $x$  über  $a$ .

2. Fall  $a$  über  $y$ : Wir betrachten das Präferenzprofil, in dem für  $J$  die Präferenz  $a \succ x \succ y$  gilt, und in dem für alle anderen Individuen  $a \succ x$  und  $y \succ x$  gilt, d.h. in dem  $a$  und  $y$  der Alternative  $x$  vorgezogen werden, während die Reihenfolge zwischen  $a$  und  $y$  nicht festgelegt sein soll.

Weil  $J$  beinahe entscheidend für  $x$  über  $y$  ist gilt, dass die Wohlfahrtsfunktion bei den angenommenen Präferenzen  $x \succ y$  liefert. Aufgrund der Einstimmigkeit (Pareto-Effizienz) muss die Wohlfahrtsfunktion aber auch  $x \succ a$  festlegen. Aufgrund der Unabhängigkeit von dritten Alternativen gilt das letztere wann immer  $J$  die Präferenz  $a \succ y$  enthält. Damit ist  $J$  aber entscheidend für  $a$  über  $y$ .

3. Fall *y* über *a*: Betrachtet sei folgendes Präferenzprofil: Für *J* gilt  $y \succ x \succ a$ ; für alle anderen gilt  $a, y \succ x$ .

Gemäß der Bedingung der Pareto-Effizienz liefert die Wohlfahrtsfunktion für dieses Profil  $y \succ x$ . Da *J* entscheidend ist für *x* über *a*, liefert sie auch  $x \succ a$  und, wegen der Transitivität der Präferenzrelation schließlich auch  $y \succ a$ .

Wiederum muss, wenn die Wohlfahrtsfunktion  $y \succ a$  für ein Profil liefert, in dem *J* die Alternative *y* vor *a* stellt, während die Ordnung von *y* und *a* für die anderen Individuen nicht festgelegt ist, auf Grund der Bedingung der Unabhängigkeit von dritten Alternativen die Wohlfahrtsfunktion  $y \succ a$  bei allen Profilen liefern, die *y* und *a* in derselben Weise ordnen, d.h. bei allen Profilen, in denen für *J* gilt:  $y \succ a$ . Damit ist *J* aber entscheidend für *y* über *a*.

4. Fall *a* über *x*: Man betrachte zunächst das Profil, in dem für *J* gilt:  $a \succ y \succ x$ , während  $y \succ x, a$  für die anderen Individuen gilt.

Wir wissen bereits, dass *J* entscheidend für  $a \succ y$  ist. Aufgrund der Bedingung der Pareto-Effizienz liefert die Wohlfahrtsfunktion aber auch  $y \succ x$ . Analog zu den vorhergehenden Fällen können wir daraus mit Hilfe der Bedingung der Unabhängigkeit von dritten Alternativen ableiten, dass *J* entscheidend für *a* über *x* ist.

5. Fall *x* über *y*: Wir betrachten das Profil, in dem für *J* gilt:  $x \succ a \succ y$ . Wir wissen bereits, dass *J* entscheidend für  $x \succ a$  und ebenso für  $a \succ y$  ist. Also muss die Wohlfahrtsfunktion für dieses Profil  $x \succ y$  liefern. Analog zu den vorhergehenden Fällen lässt sich dann mit Hilfe der Bedingung der Unabhängigkeit von dritten Alternativen schließen, dass *J* entscheidend für  $x \succ y$  ist.

6. Fall *y* über *x*: Wie im vorhergehenden Fall, nur dass diesmal *x* und *y* vertauscht sind.

7. Fall *a* über *b*: Wir betrachten ein Profil, in dem für *J* gilt  $a \succ x \succ b$ . Analog zu dem vorhergehenden Fall, können wir dann zeigen, dass *J* entscheidend für *a* über *b* ist.

In jedem der Fälle ist *J* also „entscheidend“, womit das zweite Lemma bewiesen ist. Aus dem ersten und dem zweiten Lemma ergibt sich zusammengekommen der Satz von Arrow, der damit ebenfalls bewiesen ist.

### Resumé

Nachdem der „Satz von Arrow“ mathematisch bewiesen ist, stellt sich nun erst die eigentliche Frage, wie er inhaltlich beurteilt werden muss. Der Satz von Arrow scheint zu zeigen, dass es nicht möglich ist, aus individuellen Präferenzen kollektive Entscheidungen abzuleiten, die gleichermaßen effizient, vernünftig und (hinsichtlich der Berücksichtigung der unterschiedlichen individuellen Präferenzen) gerecht sind. Aber wie weit reicht diese Erkenntnis? Dass es bei der kollektiven Entscheidungsfindung Zielkonflikte zwischen Gerechtigkeitsansprüchen und Effizienzforderungen (hier repräsentiert durch die Einstimmigkeitsbedingung) geben kann, wissen wir schon aus der politischen Lebenserfahrung. Dass sie – wie der Satz von Arrow nahelegt – unvermeidlich sind, ist eine wichtige Einsicht. Dennoch stellt sich die Frage, wie relevant derartige logische Beweisführungen in der Praxis sein können. Immerhin mag in der politischen Praxis die Vereinbarung von Gerechtigkeits- und Effizienzansprüchen noch an vielen weiteren Hindernissen scheitern als bloß dem im Satz von Arrow erfassten logischen Abbildungsproblem. Und die Zielsetzung, Gerechtigkeits- und Effizienzansprüche *möglichst weitgehend* miteinander zu vereinbaren, wird durch den Satz von Arrow keineswegs sinnlos.

### 2.1.4 Aufgaben

1. Gegeben seien drei Individuen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und drei Alternativen  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Die Präferenzen seien folgendermaßen verteilt:

$A$	$B$	$C$
$z$	$x$	$y$
$x$	$y$	$z$
$y$	$z$	$x$

Angenommen, um die kollektive Entscheidung zu treffen, welche Alternative gewählt werden soll, sind paarweise Stichwahlen vereinbart worden, und  $A$  ist zum Wahlleiter ernannt worden, mit dem Recht die Reihenfolge festzulegen, in der über jeweils zwei Alternativen abgestimmt worden ist.

- (a) In welcher Reihenfolge sollte  $A$  abstimmen lassen, damit die von  $A$  bevorzugte Alternative  $z$  mit Sicherheit gewinnt?
  - (b) Angenommen,  $B$  bemerkt  $A$ s Plan. Kann  $B$  durch „strategisches Wählen“ den Plan von  $A$  durchkreuzen? Wenn ja, wie?
2. Verständnisfrage: Was ist der Unterschied zwischen der „kollektiven Präferenz“ und der „Präferenz aller Individuen“? (Zusatzfrage für philosophiehistorisch Gebildete: Wie verhält sich diese Unterscheidung zu der von Rousseau zwischen „volonté générale“ und „volonté de tous“ ?)
  3. Bei den Beweisen des „Paradox des Liberalismus“ und des „Satzes von Arrow“ wurde jeweils die schwache Pareto-Bedingung vorausgesetzt. Erkläre, warum sich die Beweise trotzdem genauso führen lassen, wenn man nur die *starke Pareto-Bedingung* voraussetzt: Wenn kein Individuum eine bestimmte Alternative einer bestimmten anderen Alternative nachordnet, aber mindest ein Individuum sie vorzieht, dann sollte diese Alternative auch in der kollektiven Wahl bevorzugt werden.
  4. Zeige, dass die Gültigkeit des Beweises des „Paradox des Liberalismus“ (Abschnitt 2.1.2 auf Seite 87ff.) nicht davon abhängt, über welche Alternativen man den beiden Individuen  $A$  und  $B$  ihre Prärogative einräumt.
  5. Zeige: Wenn umgekehrt zuerst die Präferenzen der Individuen festgelegt werden, und erst danach die Prärogative zugewiesen wird, dann ist es immer möglich Prärogativen zu finden, so dass die Konstruktion

einer kollektiven Entscheidungsfunktion für zwei Individuen und drei Alternativen doch möglich wird.

6. Gegeben seien die beiden Präferenzprofile  $P_1, P_2$ :

	Individuum A	Individuum B	Individuum C
Profil $P_1$	$y \succ x \succ a$	$x \succ a \succ y$	$y \succ a \succ x$
Profil $P_2$	$y \succ a \succ x$	$a \succ x \succ y$	$a \succ y \succ x$

und die Sozialwahlfunktionen  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ :

	Profil $P_1$	Profil $P_2$
Swf $S_1$	$y \succ x \succ a$	$y \succ a \succ x$
Swf $S_2$	$y \succ a \succ x$	$y \succ x \succ a$
Swf $S_3$	$x \succ y \succ a$	$x \succ a \succ y$
Swf $S_4$	$a \succ y \succ x$	$a \succ y \succ x$
Swf $S_5$	$x \succ a \succ y$	$a \succ x \succ y$
Swf $S_6$	$a \succ x \succ y$	$y \succ x \succ a$

Aufgaben:

- Welche dieser Sozialwahlfunktionen erfüllt die Bedingung der *Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen*, welche nicht?
- Was ändert sich daran, wenn man Individuum C streicht?

7. Beweise:

- Eine Sozialwahlfunktion, die jedem Präferenzprofil dieselbe „soziale Wahl“ zuweist, ist immer mit der Bedingung der *Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen* vereinbar.
  - Eine Sozialwahlfunktion, die jedem Präferenzprofil die Präferenzordnung ein- und desselben Individuums aus dem Profil zuordnet, ist immer mit der Bedingung der *Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen* vereinbar.
8. Zeige, wie man durch sukzessives Ersetzen des rechten und des linken Terms in der Aussage: „ $D$  ist entscheidend für  $x$  über  $y$ “ die umgekehrte Aussage: „ $D$  ist entscheidend für  $y$  über  $x$ “ ableiten kann. Wieviele Alternativen außer  $x$  und  $y$  benötigt man dafür mindestens bzw. höchstens?

9. *Obsolet!* Es gelte: a) Für ein gegebenes  $x$  und jedes beliebige  $u$  sei  $J$  entscheidend für  $x \succ u$ . Und b) Für ein gegebenes  $y$  und ein beliebiges  $u'$  sei  $J$  weiterhin entscheidend für  $u' \succ y$ .

Zeige, dass dann gilt:  $J$  ist entscheidend für jedes beliebige Paar  $v, w$  und zwar sowohl  $v \succ w$  als auch  $w \succ v$ .

10. Warum kann man sich bei Lemma 1 des ersten Beweises des Satzes von Arrow nicht auf die Betrachtung des 1. Teils: "Ersetzbarkeit von rechts" (Seite 94) beschränken und dann den Beweis analog zu Schritt 8. von Lemma 3 (Seite 97) abkürzen?
11. Erkläre, warum ist das Resultat, dass das „zentrale Individuum“ Diktator über  $A$  und  $C$  ist, am Ende von Teil 2 des alternativen Beweises (Abschnitt 2.1.3, Seite 98ff.) unabhängig von der Reihenfolge, in der die Individuen beim „Übergang“ (Teil 1 des Beweises) durchgezählt werden?
12. Warum kann man am Ende von Teil 1 des zweiten Beweises (Abschnitt 2.1.3, Seite 98ff.) nicht sagen, dass das „zentrale Individuum“ entscheidend für  $B$  über  $A$  (oder eine beliebige andere Alternative ist)?

Zusatzfrage: Könnte man am Ende von Teil 1 sagen, dass die Menge aller Individuen bis zum „zentralen Individuum“, beinahe entscheidend für  $B$  über  $A$  (oder anstelle von  $A$  für irgend eine andere Alternative außer  $B$ ) ist?

### **schwere Aufgaben:**

13. Führe den Beweis von Lemma 1 für *vollständig* entscheidende statt bloß beinahe entscheidende Mengen.
14. Warum lässt sich der Beweis von Lemma 2 nicht auf dieselbe Weise für vollständig entscheidende statt bloß für entscheidende Mengen führen?<sup>15</sup> (Daraus ergibt sich, warum die Einführung des – zunächst vielleicht etwas kontraintuitiven – Begriffes der *beinahe* entscheidenden Mengen sinnvoll ist.)
15. Warum ist bei Teil 2 des zweiten Beweises bei Punkt 2 auf Seite 100 der Hinweis „Beschränkt man die Betrachtung auf alle Alternativen  $\succeq_n B$ “ notwendig?

---

<sup>15</sup> Zumindest nicht ohne Weiteres, denn auf gewaltsame Weise lässt sich der Beweis immer noch führen, wenn man den Begriff der beinahe entscheidenden Menge implizit in Lemma 2 einführt und Lemma 3 mit in Lemma 2 aufnimmt. . .

(Zusatzfrage: Warum gilt die Erkenntnis, dass  $A \succ B$ , dann trotzdem ohne Einschränkung für alle Alternativen?)

**für Interessierte:**

16. Wieviele Individuen und wieviele Alternativen muss es mindestens geben, damit der Satz von Arrow gilt?
17. Angenommen, es gibt  $n$  Individuen und  $k$  Alternativen stehen zur Debatte.
  - (a) Wieviele mögliche Präferenzordnungen kann ein Individuum haben?
  - (b) Wieviele mögliche Präferenzordnungen kann das Kollektiv haben?
  - (c) Wieviele mögliche Präferenzprofile gibt es?
  - (d) Wieviele mögliche Sozialwahlfunktionen gibt es?
18. Bei dem Beweis des Satzes von Arrow (Seite 93ff.) sind wir immer von strikter Bevorzugung  $\succ$  ausgegangen. Was ist in diesem Zusammenhang zur Möglichkeit der Indifferenz zwischen Alternativen zu sagen?
19. Finde einen einfacheren Beweis für Lemma 3?
20. Kann man aus den drei alternativen Beweisen einen einzigen zusammenbauen, der kürzer und eleganter ist als alle drei?

## 2.2 Zur Diskussion der Sozialwahltheorie

Nachdem im letzten Kapitel der mathematische Beweis des Satzes von Arrow ausführlich besprochen wurde, soll nun die Frage erörtert werden, was das Theorem von Arrow, das „Paradox des Liberalismus“ und verwandte mathematische Sätze inhaltlich aussagen. Solche Benennungen wie „Paradox des Liberalismus“ suggerieren ja bereits, dass sie bestimmte Schlussfolgerungen über die Natur politischer Entscheidungsprozesse implizieren. Wie verhält es sich damit?

Da es sich bei der Sozialwahltheorie zunächst einmal um eine abstrakte mathematische Theorie handelt steht der Anwendungsbereich nicht von vorn herein genau fest (etwa so wie ja auch die Differentialrechnung in der Physik genauso wie in der Volkswirtschaftslehre ihre Anwendung findet). Man kann sie auf die Entscheidungsprozesse in der großen Politik und die Demokratie im Ganzen beziehen, aber ebenso könnte man sie auch auf alle möglichen kollektiven Entscheidungsprozesse im kleinen Rahmen bei Unternehmen, Vereinen etc. beziehen. Wollte man die Frage streng systematisch angehen, so müsste man zunächst untersuchen 1) auf welche Arten kollektiver Entscheidungsprozesse sich die Theorie überhaupt anwenden lässt, 2) welche Aspekte dieser Entscheidungsprozesse sie erfasst und – mindestens ebenso wichtig! – 3) welche Aspekte sie nicht erfasst, 4) zu welchen Befunden sie bezüglich der von ihr erfassten Aspekte gelangt und 5) ob diese Befunde richtig und stimmig sind.

Im Rahmen dieser Vorlesung würde es allerdings zu weit führen, alle diese Aspekte erschöpfend zu behandeln, zumal wir mit dem Condorcet-Paradox, dem sogenannten „Paradox des Liberalismus“ und dem Satz von Arrow nur einen sehr kleinen Ausschnitt aus der Sozialwahltheorie kennen gelernt haben. Wir werden uns auf die Erörterung der Frage beschränken, inwieweit der Satz von Arrow Grenzen demokratischer Wahl- und Entscheidungsprozesse aufzeigt, und welche Auswirkungen er auf unser Demokratieverständnis hat bzw. haben sollte.

Die These, dass der Satz von Arrow bedeutsame Konsequenzen für unser Demokratieverständnis hat, ist recht häufig vertreten worden, u.a. von Nida-Rümelin, dessen Standpunkt wir als erstes behandeln werden. Sehr viel gründlicher wurde eine ähnliche These von dem Politikwissenschaftler William Riker und seiner Schule wissenschaftlich ausgebaut (Riker, 1988). Für Riker zeigt der Satz von Arrow, dass demokratische Entscheidungsprozesse grundsätzlich fragil und nur sehr begrenzt dazu in der Lage sind, den „Willen“ eines Kollektivs (etwa des Staatsvolks) zum Ausdruck zu bringen. Er zieht daraus tendenziell libertäre Konsequenzen, d.h. angesichts des fragilen Charakters demokratischer Entscheidungsprozesse sollten von vornher-



ein möglichst wenig Gegenstände überhaupt zur Disposition kollektiver Entscheidungen gestellt werden. Weiterhin sei der Sinn demokratischer Wahlen nicht in erster Linie darin zu sehen, die Politik im Sinne der mehrheitlich vom Volk gewählten Richtung festzulegen, sondern lediglich darin, dass sie – neben Gewaltenteilung, Verfassungsgerichtsbarkeit etc. – ein weiteres Mittel der Machtkontrolle sind, indem sie es ermöglichen, einer Regierung die Macht durch Abwahl wieder zu entziehen. Diese Sichtweise ist sehr gründlich von Gerry Mackie kritisiert worden, der den theoretischen Befund Rikers für äußerst schwach begründet und dessen empirische Belege sämtlich für verkehrt hält. Wir werden in diesem Kapitel einige der wichtigsten Punkte aus dieser (recht komplexen) Diskussion herausgreifen und erörtern.

### 2.2.1 Der Satz von Arrow als Widerlegung der „identären“ Demokratie

Nach Nida-Rümelins Ansicht sind der Satz von Arrow und verwandte Ergebnisse der Sozialwahltheorie für „die Entwicklung eines angemessenen Demokratieverständnisses – ex negativo – bedeutsam“, indem sie „den Bereich zulässiger Demokratiekonzeptionen“ durch apriorische Argumente, die „die logische Konsistenz von Normen- und Regelsystemen“ betreffen, einschränken. Man kann ihre Ergebnisse als Argumente gegen die „Identitätstheorie“ der Demokratie auffassen. Unter der „Identitätstheorie der Demokratie“ versteht Nida-Rümelin „die Vorstellung, Demokratie verlange die Konstituierung eines kollektiven Akteurs, dessen Entscheidungen als Aggregation der individuellen Bürgerinteressen verstanden werden können“ (Nida-Rümelin, 1991, S. 185). Er glaubt, dass der Satz von Arrow vor dem Hintergrund dieses Demokratieverständnisses „eine ernsthafte Herausforderung für die Demokratietheorie“ (Nida-Rümelin, 1991, S. 186) darstellt, zeigt er doch seiner Ansicht nach, dass „wesentliche Elemente unserer vorthoretischen Demokratievorstellung nicht tragfähig sind“ (Nida-Rümelin, 1991, S. 187). Als Alternative zu dieser vermeintlich defizitären „vorthoretischen Demokratievorstellung“ empfiehlt sich für Nida-Rümelin eine Demokratievorstellung, die sich „auf strukturelle, auf einem praktischen Konsens über sekundäre Regeln beruhende Normen“ (Nida-Rümelin, 1991, S. 186) stützt. Den Begriff der sekundären Regeln übernimmt Nida-Rümelin dabei von dem Rechtsphilosophen H.L.A. Hart, der damit diejenigen (institutionellen) Regeln bezeichnet, nach denen wir in der Gesellschaft regeln festlegen, also z.B. die Geschäftsordnung des Parlaments, die regelt auf welchem Weg Gesetze erlassen werden, im Gegensatz zu den „primären Normen“, also etwa Gesetzen, die regeln, welches Verhalten verboten oder erlaubt ist.

Um Nida-Rümelins Deutung zu untersuchen, ist Folgendes zu untersuchen:

1. Inwiefern betrifft sein Begriff der „Identitätstheorie der Demokratie“ einschlägige Demokratiekonzeptionen, insbesondere: Inwieweit gibt er das vortheoretische Demokratieverständnis richtig wieder?
2. Greift seine auf den Satz von Arrow gestützte Kritik an der „Identitätstheorie der Demokratie“, d.h. leidet diese Demokratiekonzeption tatsächlich an einem Mangel an logischer Konsistenz, den der Satz von Arrow nachweist?
3. Kann die von Nida-Rümelin skizzierte Alternative das Problem lösen?

### Die „Identitätstheorie der Demokratie“

Es ist immer ein wenig schwierig einzuschätzen, worin das vortheoretische Verständnis von etwas, also z.B. das vortheoretische Verständnis von Demokratie besteht. Nach einem sehr naiven Verständnis, das unmittelbar an die Wortbedeutung anknüpft,<sup>16</sup> ist Demokratie schlicht die Herrschaft des Volkes, wobei mehr oder weniger offen bleibt, wie diese Herrschaft des Volkes auszusehen hat. Es ist naheliegend, aber keineswegs selbstverständlich, anzunehmen, dass die „Herrschaft des Volkes“ durch irgendeine Form von Mehrheitsentscheid ausgedrückt wird. Nimmt man das aber an, so könnten der Satz von Arrow und verwandte Theoreme möglicherweise Grenzen der „Identitätstheorie der Demokratie“ aufzeigen, sofern die durch den Satz von Arrow gezogenen Grenzen für die Aggregation individueller zu kollektiven Präferenzen sich als einschneidend genug erweist, um eine durch Mehrheitsentscheid zum Ausdruck gebrachte „Herrschaft des Volkes“ sinnlos werden zu lassen. Ob das der Fall ist, wird im Laufe des Kapitels noch zu erörtern sein. Dass es, wenn es der Fall ist, unabhängig vom Satz von Arrow auch noch andere und möglicherweise sehr viel wichtigere Gründe gibt, diese sehr naive Vorstellung von Demokratie abzulehnen (Sartori, 1997 (zuerst: 1987, S. 29ff.)), wird von Nida-Rümelin dabei zugestanden (Nida-Rümelin, 1991, S. 185) und braucht hier nicht thematisiert zu werden.

Fraglich ist allerdings, ob eine „Identitätstheorie der Demokratie“ nicht auch anders verstanden werden kann. Nida-Rümelin zufolge „bildet die Vorstellung einer Zusammenfassung individueller Interessen zu einem Gemeininteresse qua Abstimmungsverfahren den Kern der durch die französische

---

<sup>16</sup>Giovanni Sartori nennt dieses sehr naive Verständnis von Demokratie deshalb auch „Etymologische Demokratie“ (Sartori, 1997 (zuerst: 1987, S. 29ff.)).

Revolution geprägten Demokratiekonzeption“ (Nida-Rümelin, 1991, S. 191). Richtig ist sicherlich, dass die durch die französische Revolution geprägte Demokratietheorie das Element der Volkssouveränität vergleichsweise stärker gegenüber anderen Elementen betont wie etwa dem der Machtkontrolle als etwa die angelsächsische Tradition. Zugleich beruht diese sich sehr stark auf Jean-Jacques Rousseau als ihren Vordenker stützende Demokratiekonzeption auf einem Verständnis von Volkssouveränität, dem gerade nicht die „Zusammenfassung individueller Interessen zu einem Gemeininteresse“ zu Grunde liegt. Rousseau unterschied sehr genau zwischen der „volonté de tous“, dem Willen aller, der in etwa der aus den individuellen Präferenzen aggregierten kollektiven Präferenzrelation im theoretischen Rahmen der Sozialwahltheorie entsprechen würde, und der „volonté générale“, dem allgemeinen Willen, der das Gemeinwohl repräsentiert, und der bei Rousseau gerade nicht durch Aggregation von Einzelinteressen („volonté particulière“) entsteht, sondern so etwas wie das bessere Gewissen und den höheren Willen der Bürger verkörpert, soweit sie sich dem Gemeinwohl verpflichtet fühlen. Gegen Rousseaus Demokratietheorie gibt es viele Einwände (Schmidt, 2000, S. 103ff.) – unter anderem wird ihr vorgeworfen, dass sie kollektivistisch sei – aber durch Argumente die sich auf den Satz von Arrow und verwandte Befunde der Sozialwahltheorie stützen könnten, ist die Rousseausche Variante einer Identitätstheorie – ebenso wie die meisten anderen kollektivistischen Gesellschaftstheorien – von vornherein nicht angreifbar. Sofern die auf den Satz von Arrow gestützte Kritik an demokratischen Abstimmungsverfahren überhaupt Stich hält, wäre – stark vereinfacht gesprochen – die angelsächsische Tradition der Demokratietheorie also stärker davon betroffen als die französische.

Rousseaus  
Demokratie-  
theorie

### **Die Frage der Durchschlagskraft der auf den Satz von Arrow gestützten Kritik an der Identitätstheorie**

Wenn wir uns aber schon einmal auf eine solche Identitätstheorie der Demokratie verständigen, bei der die Identität von Herrschern und Beherrschten durch die „Zusammenfassung individueller Interessen zu einem Gemeininteresse qua Abstimmungsverfahren“ (Nida-Rümelin, 1991, S. 191) zustande kommt, dann ist die Frage zu untersuchen, ob der Satz von Arrow tatsächlich die Unmöglichkeit einer derartigen Identitätstheorie erweist. Mehrere Aspekte sind hier zu unterscheiden:

**a) Relevanz der auf Arrow gestützten Kritik der „Identitätstheorie“** Weitgehend ausgespart bleiben soll hier wiederum die Frage der Relevanz der auf den Satz von Arrow gestützten Einwände. Wie schon gegen die Rousseau'sche Demokratietheorie gibt es auch gegen diese Art von Identi-

Demokratie als  
„Mehrheitsty-  
rannei“

tätstheorie unabhängig von Arrow weitere Einwände, die möglicherweise sehr viel einschlägiger sind. Der historisch wirksamste Einwand gegen diese Art von Identitätstheorie dürfte derjenige sein, dass reine Demokratie dieser Art auf eine „Mehrheitstyannei“ hinausläuft. Die Kritiker der „Mehrheitstyannei“ bestritten dabei nicht, dass es in der Demokratie die „Mehrheit“ ist, die (schlimmstensfalls) tyrannisch herrscht, nur bezweifelten sie, dass die Mehrheit immer im Einklang mit dem Gemeinwohl und unter der Achtung der Rechte der Minderheit herrschen würde. Diejenigen der heutigen Demokratiekritiker, die sich auf die Sozialwahltheorie stützen, bestreiten bereits, dass die durch eine Wahl herbeigeführte Entscheidung in jedem Fall Ausdruck des Willens der Mehrheit ist. Unabhängig von den technischen Beschränkungen der Abbildung individueller auf kollektive Präferenzen, wie sie uns der Satz von Arrow vor Augen führt, ist schon die Tatsache, dass es bei so gut wie allen Mehrheitsentscheidungen eine Minderheit gibt, die die Überzeugung der Mehrheit nicht teilt, Grund genug dafür, die Vorstellung, dass demokratische Mehrheitsentscheidungen eine Identität von Herrschern und Beherrschten herbeiführen in einem anderen als bloß sehr schwachen symbolischen Sinne zurückzuweisen.<sup>17</sup> Es bleibt hinsichtlich der „Identitätstheorie“ also nur noch die Frage, ob der Satz von Arrow dem noch ein weiteres hinzufügt. Man muss aber gar nicht unbedingt nur wie Nida-Rümelin auf die Identitätstheorie abstellen. Denn auch unabhängig von der „Identitätstheorie“ stellt sich die Frage, inwiefern demokratische Mehrheitsentscheidungsverfahren Legitimität erzeugen können und zur effizienten Lösung politischer Probleme taugen. Der Satz von Arrow spricht in dieser Hinsicht eine bestimmte Art von möglichen Problemen an.

**b) Die Gültigkeit der Voraussetzungen des Satzes von Arrow** Bevor wir sagen können, dass der Satz von Arrow mögliche Probleme demokratischer Entscheidungsprozesse beschreibt, müssen wir uns erstens überlegen, ob demokratische Entscheidungsprozesse mit einem theoretischen Modell der Abbildung individueller auf kollektive Präferenzen richtig beschrieben werden und zweitens, wenn dies der Fall ist, ob die Voraussetzungen des Satzes von Arrow tatsächlich notwendige<sup>18</sup> Mindestbedingungen demokratischer Entscheidungsprozesse repräsentieren.

Hinsichtlich des ersten Punktes, dass das Modell der Abbildung individu-

<sup>17</sup>Vgl. dazu auch Sartori (1997 (zuerst: 1987), besonders das 2. Kapitel.

<sup>18</sup>Dass es keine hinreichenden Bedingungen sind, dürfte offensichtlich sein. Die auf Arrow gestützten demokratieskeptischen Argumente laufen denn auch normalerweise so: Wenn sich diese „harmlosen“ Bedingungen (d.i. die Voraussetzungen für den Satz von Arrow) schon nicht erfüllen lassen, dann muss man nach anspruchsvolleren Bedingungen gar nicht erst fragen.

eller auf kollektive Präferenzen demokratische Entscheidungsprozesse richtig erfasst, liegt zunächst der Einwand nahe, dass demokratische Entscheidungsprozesse in erster Linie deliberative Prozesse sind, bei denen die Gegenstände der politischen Entscheidungen und die sich bietenden Alternativen erst in öffentlichen Diskussionsprozessen bestimmt werden. Die individuellen Präferenzen sind nach dieser Sichtweise nicht einfach ein Eingangsparameter des politischen Prozesses, sondern zumindest teilweise bilden sie sich erst im Laufe des Prozesses, wandeln sich, gleichen sich aneinander an, oder dissoziieren sich voneinander, ordnen sich nach politischen Lagern etc. All diese Vorgänge und wohlbekannten Phänomene werden von der Sozialwahltheorie bisher noch wenig erfasst.<sup>19</sup> Dennoch wird die Sozialwahltheorie soweit ihr das Modell der Aggregation von Präferenzen zu Grunde liegt durch die Allgegenwart deliberativer Prozesse in der Politik nicht überflüssig gemacht. Denn auch deliberative Prozesse führen nicht dazu, dass sämtliche Unterschiede zwischen den Präferenzen von Individuen und Gruppen eingeebnet werden. Am Ende wird auch in der Demokratie zwischen verschiedenen Alternativen abgestimmt, die von unterschiedlichen Lagern präferiert werden. Spätestens dann sind wir wieder bei der Aggregation von individuellen zu Kollektivpräferenzen. Das Vorhandensein deliberativer Prozesse macht die Präferenzaggregation also nicht überflüssig. Bestenfalls bewirken deliberative Prozesse, dass Arrows Bedingung des unbeschränkten Bereichs (von möglichen individuellen Präferenzprofilen) in der Praxis nur stark entschärft auftritt.

Um den zweiten Punkt zu klären, ist es notwendig, die unterschiedlichen Voraussetzungen von Arrow durchzugehen und darauf hin zu untersuchen, ob sie tatsächlich unerlässlich sind. Darüber gibt es, wie man sich denken kann, eine breite Diskussion. Im folgenden sollen nur kurz die wichtigsten theoretischen (zu den empirischen, siehe unten) Einwände angesprochen werden:

**Transitivität der kollektiven Präferenzen** Eine der Voraussetzungen von Arrow bestand darin, dass die kollektiven Präferenzen transitiv sein müssten. Diese Forderung lässt sich dadurch motivieren, dass intransitive Präferenzen zu bestimmten Problemen führen kann, wie sie durch das Geldpumpenargumentversinnbildlicht werden. Analog zum Geldpumpenargument kann man sich im politischen Kontext theoretisch einen Manipulator vorstellen, der einen Zyklus innerhalb der kollektiven Präferenzen dazu

---

<sup>19</sup>Das Thema „Wandel von Präferenzen“ findet innerhalb dieser Schule erst neuerlich größere Beachtung. Bei den im letzten Kapitel besprochenen Ansätzen (Satz von Arrow, „Paradox des Liberalismus“) werden die individuellen Präferenzen noch als gegeben vorausgesetzt und von ihrem möglichen Wandel mit der Zeit oder infolge von Diskussionsprozessen, die Abstimmungen in der Demokratie typischerweise voraus gehen, wird zunächst abstrahiert.

Transitivität  
ist nicht  
unterlässlich

nutzt, um eine bestimmte politische Agenda durchzusetzen. Aber ebenso wie beim Geldpumpenargument wäre auch im politischen Kontext der Einwand angebracht, dass sich eine solche Ausbeutungstechnik praktisch kaum verwirklichen lassen dürfte. Und, wie schon zuvor erläutert (Seite 28), zeigt das Argument nicht dass intransitive oder zyklische Präferenzen schlechthin absurd sind. Insofern als es denkbar ist, für die aus zyklischen Präferenzen möglicherweise resultierenden Probleme, praktische Lösungen zu finden, kann man nicht sagen, dass die Erzeugung transitiver kollektiver Präferenzen zu den unerlässlichen Bedingungen eines akzeptablen Abstimmungsverfahrens gehört, auch wenn es natürlich wünschenswert wäre.

**Unbeschränkter Bereich der individuellen Präferenzen** Der Bedingung des „unbeschränkten Bereichs“ kann man unterschiedliche Interpretationen geben:

Beliebige  
Güter oder nur  
beliebige  
Anordnung der  
Güter?

1. Unbeschränkter Bereich heisst, dass weder die Menge der Güter, über die die Präferenzen gebildet werden sollen, in irgendeiner Weise beschränkt ist, noch die Art und Weise wie diese Güter durch die individuellen Präferenzrelationen angeordnet werden (solange die üblichen Bedingungen wohlgeformter Präferenzrelationen wie Zusammenhang, Transitivität etc., erfüllt sind).
2. Unbeschränkter Bereich bedeutet, dass zwar die Menge der Güter, über die die Präferenzen gebildet werden sollten, eingeschränkt sein kann, nicht aber die Ordnung der Güter innerhalb der individuellen Präferenzen.

Logischer  
Einwand

Gegen die erste Interpretation spricht ein logischer und ein normativ-politischer Einwand. Der logische Einwand ist der Folgende: Angenommen, die Menge der möglichen Güter, auf die sich die individuelle Präferenzrelation beziehen darf, wäre in jeder Hinsicht unbeschränkt, dann können die Individuen auch Präferenzen darüber bilden, ob sie z.B. die Gültigkeit der Bedingung der paarweisen Unabhängigkeit bei Abstimmungsverfahren gegenüber der Ungültigkeit dieser Bedingung bevorzugen oder nicht. Angenommen nun, die individuellen Präferenzen sind so verteilt, dass alle Individuen einhellig dagegen sind, die paarweise Unabhängigkeit zur Voraussetzung eines Abstimmungsverfahrens zu machen, dann kann man diese Bedingung nur unter Bruch der Effizienz-Bedingung („Pareto-Kriterium“) aufrecht erhalten. Mit anderen Worten: Bei einer weiten Auslegung des „unbeschränkten Bereichs“ geraten die Bedingungen Arrows also untereinander in einen Widerspruch.

Der normativ-politische Einwand, dass wir schon aus moralischen Gründen bestimmte Güter und Präferenzen, z.B. solche die Menschenrechtsverletzungen beinhalten oder die auf die Abschaffung der Demokratie oder die Wiedereinführung der Sklaverei zielen oder dergleichen, von vornherein ausschließen. Es ist nicht ganz klar, ob man moralische Restriktionen stets so modellieren kann, dass sie sich nur im Sinne einer Beschränkung der Menge der zur Disposition stehenden Güter auswirken, oder ob sie in manchen Fällen nur so modelliert werden können, dass die Menge der möglichen Präferenzrelationen über einer Gütermenge eingeschränkt wird. Im ersteren Fall würde man lediglich von der ersten zur zweiten Interpretation der Bedingung des „unbeschränkten Bereichs“ übergehen müssen. Im zweiten Fall wäre dann immer noch die Frage, ob durch die Beschränkung der zugelassenen Präferenzordnungen infolge moralischer Restriktionen alle problem erzeugenden Präferenzprofile (im Sinne des Satzes von Arrow) wegfallen. Da man dies nicht annehmen kann, sollte man vorsichtshalber davon ausgehen, dass sich moralische Restriktionen (wie schon zuvor die deliberativen Prozesse) höchstens dahingehend auswirken, dass die Bedingung des unbeschränkten Bereichs möglicherweise entschärfen.<sup>20</sup> Ein Einwand, der zur gänzlichen Zurückweisung der Bedingung des unbeschränkten Bereichs führt, ergibt sich aus der Berücksichtigung moralischer Restriktionen also nicht.

Normativer  
Einwand

Die Diskussion zeigt aber, dass man die Bedingung des unbeschränkten Bereichs nicht schon dadurch verteidigen, dass jede Einschränkung des Bereichs zugelassener Präferenzen notwendigerweise autoritär oder paternalistisch und mit elementaren Prinzipien des Liberalismus und der Demokratie unvereinbar wäre (VERWEIS MUELLER).

**Pareto-Effizienz** Das Kriterium der Pareto-Effizienz scheint zunächst hochgradig selbstevident zu sein. Warum sollte man eine bestimmte Entscheidung treffen, wenn es eine andere gibt, bei der es einigen besser aber niemandem schlechter ergehen würde? Aber man kann die Sache auch von einem anderen Gesichtspunkt betrachten: Wenn man die Wahl hat zwischen einer pareto-effizienten Diktatur und einer pareto-ineffizienten Demokratie, sollte man dann nicht lieber die pareto-ineffiziente Demokratie vorziehen. Natürlich käme es wohl auch darauf an, wie „ineffizient“ die Demokratie wäre. Aber dass maximale Pareto-Effizienz zu einem notwendigen Kriterium eines Kollektiventscheidungsverfahrens erklärt wird, und damit gegenüber anderen Werten und Zielsetzungen nicht mehr abwägungsfähig ist, ist alles andere als apriori selbstverständlich.

Grenzen der  
Pareto-  
Effizienz

<sup>20</sup> „Entschärfen“ in dem Sinne, dass problematische Präferenzprofile seltener oder unwahrscheinlicher werden.

**Unabhängigkeit von dritten Alternativen** Das Prinzip der Unabhängigkeit von dritten Alternativen wirft ähnliche Fragen auf wie die Transitivität, ist dabei aber noch um einiges umstrittener. Motivieren lässt sich dieses Prinzip zunächst dadurch, dass ohne dieses Prinzip durch hinzufügen von weiteren „irrelevanten“ Alternativen das Abstimmungsergebnis theoretisch manipuliert werden kann. Diese Motivation ist ähnlich wie das Geldpumpenargument pragmatischer und nicht logischer Natur. Insofern müssen die Probleme, die durch den Wegfall der paarweisen Unabhängigkeit entstehen können, nicht von vornherein als unüberwindlich angesehen werden. Umgekehrt wirft das Prinzip, nur paarweise Vergleiche zwischen den vorhandenen Alternativen zuzulassen, seinerseits Probleme auf, denn es führt dazu, dass ein möglicherweise sehr relevanter Teil der Informationen über die Rangfolge der Präferenzen zwangsläufig vernachlässigt werden muss.

Beispiel für die  
Relevanz  
dritter  
Alternativen

Dazu ein Beispiel: Angenommen der Kleingärtnerverein entscheidet darüber, welche Getränke zur Jahreshauptversammlung gereicht werden sollen. Der Getränkehändler bietet einen fetten Preisnachlass an, wenn nur er nur eine Sorte Getränke liefern muss. Den Preisnachlass wollen unsere Kleingärtner natürlich unbedingt in Anspruch nehmen. Es bleibt also nur noch die Frage der Auswahl des Getränks. Die eine Hälfte der Kleingärtner habe die Präferenz: *Bier*  $\succ$  *Cola*  $\succ$  *Limo*  $\succ$  *Wasser*  $\succ$  *Saft*. Die andere Hälfte der Kleingärtner – womöglich Antialkoholiker – habe die Präferenz *Cola*  $\succ$  *Limo*  $\succ$  *Wasser*  $\succ$  *Saft*  $\succ$  *Bier*. Nun teilt der Getränkehändler weiterhin mit, dass abgesehen von Bier und Cola wegen eines Streiks keine anderen Getränke mehr lieferbar sind. Die Kleingärtner sind also gezwungen zwischen Bier und Cola zu entscheiden, da alle anderen Alternativen jetzt „irrelevant“ geworden sind. Frage: Sollte bei dieser Entscheidung die Information, dass Bier bei der einen Gruppe an der allerletzten Stelle steht, während beide Gruppen Cola an die erste oder zweite Stelle setzten, wirklich nicht in die Entscheidung einbezogen werden dürfen? Das Prinzip der paarweisen Unabhängigkeit würde es verbieten, solche Informationen zu verwenden. Das Beispiel legt jedoch eher nahe, dass das Prinzip der paarweisen Unabhängigkeit zu eng gefasst ist, indem es nicht nur die Unabhängigkeit von „irrelevanten“ Alternativen sicherstellt, sondern – je nach Umständen – auch relevante Alternativen aus der Betrachtung ausschließt.

**Diktaturfreiheit** Das Prinzip der Diktaturfreiheit ist wohl das einzige, an dem man ohne wenn und aber festhalten wird, wenn man die Theorie auf die Politik übertragen will. Denn wenn man schon die Diktatur zulässt, benötigt man auch keine Theorie der Abstimmung mehr. Es ist ja zuallererst das Problem, ein Abstimmungs- bzw. Kollektiventscheidungsverfahren zu finden,



dass möglichst Vielen möglichst gerecht wird, welches die Entwicklung dieser Theorie motiviert. Wenn man nun das Prinzip der Diktaturfreiheit aufgibt, bräuchte man auch die Theorie nicht mehr.<sup>21</sup> Zudem ist das Prinzip der Diktaturfreiheit so defensiv gefasst, dass man sich anders als bei den anderen Prinzipien kaum noch Abschwächungen vorstellen kann.

Wie man sieht, hält abgesehen von der Diktaturfreiheit nur das Prinzip des unbeschränkten Bereichs, wenn man es nicht zu weit auslegt, den möglichen Einwänden stand. Bei allen anderen Prinzipien kann man zwar zugestehen, dass sie berechnete Anliegen artikulieren, dabei aber oft enger sind, als dies notwendig erscheint, und zugleich andere, ebenso berechnete Anliegen, ausschließen (wie z.B. die Berücksichtigung der gesamten Rangordnung und nicht nur des paarweisen Verhältnisses von Gütern nach den gegebenen Präferenzen). Anstatt sich die Bedingungen Arrows also als notwendige Voraussetzungen vorzustellen, die jedes akzeptable Kollektiventscheidungsverfahren mindestens erfüllen muss, sollte man sie lieber als wünschenswerte Voraussetzungen betrachten, von denen der Satz von Arrow zeigt, dass sie nicht alle gleichzeitig erfüllbar sind, so dass man Abwägungen treffen und eventuell Abstriche machen muss. Es kann aber nicht ernsthaft die Rede davon sein, dass die Ergebnisse der Sozialwahltheorie – von denen nicht wenige übrigens zeigen, dass sich Arrows negatives Resultat schon bei geringfügiger Aufweichung seiner Voraussetzungen in ein positives Resultat verwandelt (Mueller, 2003, S. 585ff.), wenn auch jeweils mit mehr oder weniger erwünschten Nebeneffekten wie z.B. zyklische kollektive Präferenzen – „den Bereich zulässiger Demokratiekonzeptionen ein[schränken]“ und „Diese Einschränkung .. apriorisch [ist]“ (Nida-Rümelin, 1991, S. 185).

### c) Die Frage der empirischen Möglichkeit und Häufigkeit von „Problemfällen“ bei der Aggregation von individuellen Präferenzen

Das Paradox des Liberalismus und der Satz von Arrow zeigen, dass eine bestimmte Menge von wünschenswerten Bedingungen nicht miteinander vereinbar sind. Die Beweise beruhten unter anderem darauf, dass die Bedingung des unbeschränkten Bereichs in der Weise ausgenutzt wurde, dass gezielt solche Profile individueller Präferenzen konstruiert wurden, für die die Erfüllung der anderen Bedingungen nicht mehr möglich ist. Diesen Sachverhalt kann man aber auch so zu interpretieren versuchen, dass das Condorcet Paradox, der Satz von Arrow oder das Paradox des Liberalismus und andere verwandte

---

<sup>21</sup>Unabhängig von der Sozialwahltheorie kann man aber immer noch die Frage diskutieren, ob in bestimmten Situationen diktatorische Entscheidungsverfahren nicht empfehlenswert sein können. Bekanntlich kannte die römische Republik die Institution einer Diktatur auf Zeit (1 Jahr), um bei besonderen Bedrohungen der politischen Ordnung die Fähigkeit zu raschen Entscheidungen sicher zu stellen.

Theorme in der Praxis nur ganz bestimmte Problemfälle betreffen. So entsteht die zyklische Präferenzverteilung beim Condorcet-Paradox nur bei ganz bestimmten, „unglücklich“ verteilten individuellen Präferenzen. Insofern muss das Condorcet-Paradox nicht bedeuten, dass demokratische Abstimmungsverfahren grundsätzlich nicht robust wären (in dem Sinne, dass sie keine wohlgeordneten kollektiven Präferenzen liefern). Es bedeutet zunächst nur, dass sie in besonderen Fällen nicht robust sind. Die Frage, die sich dann stellt, ist diejenige, wie häufig derartige Fälle vorkommen, d.h. ob es sich dabei um seltene Einzelfälle oder um einen häufig auftretenden Regelfall handelt. Diese Frage kann man auf unterschiedliche Art und Weise untersuchen: 1) Durch analytische Überlegungen betreffend die Häufigkeit bzw. Wahrscheinlichkeit von Präferenzprofilen, die z.B. zu zyklischen kollektiven Präferenzen führen, 2) durch Computersimulationen und 3) empirisch, indem man nach Beispielen sucht, wo entsprechende Präferenzprofile aufgetreten sind. Eine ausführliche Übersicht über derartige Studien (weiter unten mehr dazu) liefert Gerry Mackie (Mackie, 2003, S. 46ff.), der zu dem Ergebnis kommt, dass die Problemfälle logisch möglich aber empirisch eher unwahrscheinlich sind.<sup>22</sup>

Man könnte an dieser Stelle immer noch den Einwand vorbringen, dass demokratische Abstimmungs- und Entscheidungsprozesse sich gerade in solchen (wenn auch seltenen) kritischen Ausnahmefällen bewähren sollten. Dazu ist zweierlei zu sagen:

1. Wenn die „Problemfälle“ wirklich nur selten sind, dann genügt dies bereits um die These der „analytischen“ Widerlegung der identären Demokratie durch Arrow (Nida-Rümelin, 1991) bzw. der mit Arrow begründeten Unfähigkeit demokratischer Entscheidungsverfahren, den „Volkswillen“ zum Ausdruck zu bringen (Riker, 1988) zu erschüttern.
2. Treten die „Problemfälle“ nur selten auf, dann erscheint – rein technisch betrachtet – folgende Abhilfe denkbar. Man verwende irgendein einigermaßen brauchbares Abstimmungsverfahren, z.B. Condorcet (parweise Abstimmung zwischen allen Paaren von Alternativen). Treten zyklische Präferenzen auf, schalte man auf ein anderes Abstimmungsverfahren, z.B. Borda-Zählung (siehe Übungsaufgabe 3, Seite 134) um. Durch den Satz von Arrow ist zwar klar, dass auch ein solches kombiniertes Verfahren nicht alle Bedingungen erfüllen kann. So verletzt z.B. das Borda-Verfahren die Bedingung der paarweisen Unabhängigkeit. Aber da es als Teil eines kombinierten Verfahrens auftritt, muss diese Verletzung nur noch in den (vermutlich) wenigen Fällen in Kauf

---

<sup>22</sup>Mackie reagiert damit auf die gegenteilige These William Rikers (Riker, 1988, S. 119ff.).

genommen werden, in denen das Condorcet-Verfahren intransitive Präferenzen liefert.

### **Eine „strukturelle Konzeption kollektiver Rationalität“ als Alternative?**

Bleibt, was den Entwurf Nida-Rümelins betrifft, schließlich die Frage, ob er eine gangbare Alternative anbieten kann. Sein Vorschlag, der ganz dem Kanon der liberalen Demokratietheorie entspricht, sieht ein zweistufiges Verfahren vor, bei dem individuelle Rechte den kollektiven Entscheidungen vorgeordnet werden (Nida-Rümelin, 1991, S. 196ff.). Mit anderen Worten: Kollektive Entscheidungen dürfen sich von vornherein nur auf einen bestimmten Bereich von Entscheidungsgegenständen beziehen, während andere Gegenstände, weil sie individuelle Rechte berühren von vornherein nicht zur Disposition kollektiver Entscheidungen führen. Da damit aber nur die Menge der zur kollektiven Entscheidung zugelassenen Güter nicht aber die Ordnung der individuellen Präferenzen über diese Güter beschränkt ist (siehe dazu auch die Diskussion der Bedingung des „unbeschränkten Bereichs“ weiter oben auf Seite 118), bleibt vollkommen unersichtlich, inwiefern sich auf diese Weise die durch den Satz von Arrow aufgeworfenen Probleme vermeiden lassen sollen. Möglicherweise fallen die Probleme weniger gravierend aus, weil derartige strukturelle Beschränkungen z.B. die Menge der zur Wahl stehenden Güter verringern könnten, aber Nida-Rümelin erläutert dies nicht. Insofern löst die „strukturelle Rationalität“ Nida-Rümelins weder das Problem noch kann man sie umgekehrt in sinnvoller Weise durch die von Arrow, Sen und anderen aufgeworfenen Schwierigkeiten kollektiver Entscheidungsfindung motivieren.

## **2.3 Die These des „demokratischen Irrationalismus“**

Bereits einige Jahre zuvor und sehr viel wirkungsmächtiger hat William Riker gestützt auf den Satz von Arrow die These vertreten, dass jedes kollektive Entscheidungsverfahren (und damit insbesondere auch alle demokratischen Entscheidungsverfahren) in vielfach chaotisch, von Zufällen bestimmt, kurz, in hohem Grade sinnlos sind:

The main thrust of Arrow's theorem and all the associated literature is that there is an unresolvable tension between logicity and fairness. To guarantee an ordering or a consistent path, independent

choice requires that there be some sort of concentration of power (dictators, oligarchies or collegia of vetoers) in sharp conflict with democratic ideals. ...

These conflicts have been investigated in great detail, especially in the last decade; but no adequate resolution of the tension has been discovered, and it appears quite unlikely that any will be. The unavoidable inference is, therefore, that, so long as a society preserves democratic institutions, its members can expect that some of their social choices will be unordered or inconsistent. And when this is true, no meaningful choice can be made. If  $y$  is in fact chosen – given the mechanism of choice and the profile of individual valuations – then to say that  $x$  is best or right or more desired is probably false. But it would also be equally false to say that  $y$  is best or right or most desired. And in that sense, the choice lacks meaning. (Riker, 1988, S. 136)

William Riker steht mit dieser Auffassung keineswegs allein. Auch wenn er sie in einer vergleichsweise scharfen Form vertritt, so handelt es sich dabei um eine Konsequenz, die von zahlreichen Autoren aus dem Satz von Arrow gezogen wird (Mackie, 2003, S. 10-15)<sup>23</sup> Diese Sichtweise ist von Rikers Kritiker Gerry Mackie als die These des „demokratischen Irrationalismus“ bezeichnet worden. Riker selbst, der sich – durchaus glaubwürdig – als liberaler Demokrat verstand, hat diese Bezeichnung nicht gebraucht, sie trifft seine These aber sehr gut. Riker geht nicht soweit, demokratische Entscheidungsverfahren grundsätzlich abzulehnen, aber seiner Ansicht nach müssen wir ihren Sinn und ihre Funktion anders verstehen. Der Sinn demokratischer Wahlen liegt für ihn nicht darin, dem Willen der Mehrheit politisch Geltung zu verschaffen, sondern er allein darin, dass durch das Instrument der Wahl die Führung abgewählt und von Zeit zu Zeit ausgewechselt werden kann. Der Sinn demokratischer Wahlen erschöpft sich für ihn also allein in der Funktion der Machtkontrolle. Diese sehr reduzierte Deutung demokratischer Wahlen hat zugleich die Nebenwirkung, politischen Entscheidungen in der Demokratie ihre Legitimität zu entziehen, da ja nicht mehr gut behauptet werden kann, dass sie durch den Mehrheitswillen legitimiert sind.

Ähnlich wie Nida-Rümelin glaubt Riker, dass seine These wesentlich analytischer Natur ist, und sich im Wesentlichen durch die mathematische Analyse von Wahlverfahren begründen lässt. Dennoch liefert er auch eine Reihe historischer Beispiele, die seine These stützen sollen.

Im einzelnen beruht Rikers These auf folgenden Punkten:

---

<sup>23</sup>Dies könnte vielleicht auch damit zusammen hängen, dass die meisten dieser Autoren aus dem ökonomischen Spektrum stammen und in der Staatsphilosophie die liberalen Werte höher als die demokratischen schätzen.

1. *Nicht-Existenz einer wahren sozialen Wahl:* Es gibt kein Wahlverfahren, dass alle Bedingungen der Fairness und Konsistenz erfüllt. Unter denen, die sie nicht erfüllen, gibt es mehrere gleich gute bzw. gleich schlechte Verfahren, die aber in bestimmten Fällen, von denen Riker glaubt, dass sie recht häufig vorkommen, jeweils andere Ergebnisse liefern, so dass man von keiner Methode sagen kann sie liefere die „wahre“ soziale Wahl. (Riker, 1988, S. 111ff.)
2. *Sinnlosigkeit der sozialen Wahl:* Bei allen demokratischen Entscheidungsverfahren, werden einige Entscheidungen ungeordnet oder inkonsistent sein (intransitive kollektive Präferenzen!). In diesem Fall ist die soziale Wahl sinnlos. (Riker, 1988, S. 136ff.)
3. *Verdeckung der wahren Präferenzen durch strategisches Wahlverhalten:* Durch „strategisches Wählen“ verdecken die Akteure ihre wirklichen Präferenzen, so dass am Ende nicht mehr deutlich ist, inwiefern eine getroffene soziale Entscheidung Ausdruck der wirklichen Präferenzen der Individuen ist. (Riker, 1988, S. 167ff.)
4. *Manipulationsanfälligkeit der sozialen Wahl:* Viele demokratische Wahlverfahren erweisen sich als manipulationsanfällig (z.B. durch die Einführung „irrelevanter“ Alternativen, sofern es sich um Verfahren handelt, die die Bedingung der paarweisen Unabhängigkeit verletzen). Auch dies erschüttert die Glaubwürdigkeit der sozialen Wahl. (Riker, 1988, S. 192ff.)

Im folgenden sollen – im Wesentlichen anhand der Kritik Mackies (Mackie, 2003) – die ersten beiden Punkte einer (vorwiegend) theoretischen Kritik unterzogen werden und die letzten beiden Punkte anhand historischer Beispiele untersucht werden.

HIER FEHLT NOCH EIN TEIL DES KAPITELS !!!

### 2.3.1 Historische Beispiele

Diejenigen der historischen Beispiele Rikers, die hier diskutiert werden sollen, führen uns in die Zeit unmittelbar vor dem amerikanischen Bürgerkrieg. Daher ist zunächst etwas zum historischen Hintergrund zu sagen.

Im Laufe der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts hatte sich in den Vereinigten Staaten ein Zwei-Parteien System herausgebildet, mit den „Whigs“ auf der einen und den „Demokraten“ auf der anderen Seite. Diese Parteien waren zunächst Sammlungsbewegungen ohne scharfes ideologisches Profil. In beide Parteien strömten die früheren Föderalisten (was zeigt, dass die Spaltung

zwischen Föderalisten und Antiföderalisten aus der Gründungszeit überwunden war) und beide Parteien waren sektionsübergreifend in dem Sinne, dass die Parteigrenzen auch nicht strikt entlang geographischer Regionen (etwa Nordstaaten-Südstaaten oder Neu England-Westen) verliefen. Dies änderte sich jedoch in der Mitte der 19. Jahrhunderts und einer der wesentlichen Auslöser war die am 8. August 1846 ins Repräsentanten-Haus eingebrachte Wilmot-Klausel, die ein Verbot der Sklaverei in den neuerworbenen (bzw. neu zu erwerbenden) Gebieten Texas und New Mexico forderte. Der Vorstoß scheiterte zwar, führte aber die Frage der Sklaverei in den neuen Gebieten als bestimmendes Thema der amerikanischen Politik der folgenden Jahrzehnte ein. Das Thema Sklaverei bewirkte eine zunehmende Polarisierung der politischen Lager, wobei die Frontlinien mehr und mehr entlang der Sektionsgrenzen verliefen. Diese Veränderung der politischen Landschaft spiegelte sich in der Umformung des Parteiensystems wieder. Die Partei der Whigs zerfiel und ging schließlich größtenteils in der 1954 von Anti-Sklaverei-Aktivisten neu gegründeten Partei der Republikaner auf. Die Demokraten wandelten sich mehr und mehr zu einer Südstaaten-Partei, eine Prägung, die sie bis weit ins 20. Jahrhundert beibehalten sollten. Daneben entstanden als Übergangserscheinung in der Mitte des 19. Jahrhunderts eine Reihe kurzlebiger Parteien, von für uns aber nur die gegen die Sklaverei gerichtete "Free Soil Party" im Zusammenhang mit der Wilmot-Klausel eine Rolle spielt.

Die Präsidentschaftswahl von 1860, neben der Wilmot-Klausel das zweite Beispiel Rikers, das hier besprochen werden soll, fand in einer aufgeheizten Atmosphäre statt. Von den Vier Kandidaten vertrat der schließlich zum Präsidenten gewählte Abraham Lincoln die vergleichsweise "radikalste" Anti-Sklaverei Position. Noch bevor er sein Amt am 4. März 1861 antrat hatten die Südstaaten mit der Sezession begonnen. Riker zufolge lagen sowohl bei den Abstimmungen im Repräsentantenhaus über die Wilmot-Klausel als auch bei den Präsidentschaftswahlen von 1860 zyklische Präferenzen vor. Der Ausgang der Wahl und damit der folgenschweren Ereignisse, die zum amerikanischen Bürgerkrieg führten, waren Rikers Deutung zufolge, also ein eher zufälliges Artefakt des Wahlsystems. Auch wenn die Abschaffung der Sklaverei, die sich dadurch ergab, natürlich befürwortenswert ist: "A fortunate *by-product* of that process was the abolition of slavery" (Riker, 1988, S. 232, Hervorhebung von mir, E.A.)

Wie Riker seine Deutung(en) belegt soll nun im Einzelnen untersucht werden.

### Die Wilmot-Klausel

Bei der Wilmot-Klausel handelt es sich um eine vom Abgeordneten David Wilmot vorgeschlagene Ergänzung zu einem vom damals regierenden Präsidenten James K. Polk eingebrachtem Budget-Gesetz. Das Budgetgesetz („appropriations bill“) von Polk sah vor einer größeren Summe an Haushaltsmitteln zur Bestechung der mexikanischen Armee einzustzen, um den Krieg mit Mexiko, der über die Annexion von Texas entbrannt war, frühzeitig und mit vorteilhaftem Friedensschluss zu beenden. Wilmot brachte nun erstmals den Ergänzungsvorschlag ein, dass die Mittel dafür nur bewilligt werden sollten, wenn die neu erworbenen Territorien den „freien“ Staaten bzw. Territorien zugeschlagen würden, in denen das Verbot der Sklaverei galt. Der Antrag wurde in den folgenden Jahren mehrmals eingebracht. Wie bei derartigen Anträgen üblich, fanden mehrere Lesungen und Abstimmungen darüber statt. Das um den Antrag erweiterte Gesetz wurde schließlich vom Repräsentantenhaus verabschiedet, scheiterte aber im Senat durch einen filibuster.<sup>24</sup>

Im Ergebnis wurde also weder das Budgetgesetz noch das um die Wilmot-Klausel erweiterte Budgetgesetz verabschiedet, sondern der Krieg mit Mexiko noch einige Jahre weiter geführt. Auch wenn der Krieg schließlich siegreich beendet wurde, so war dies – nach Rikers in diesem Punkt glaubwürdiger Deutung – die von den meisten am wenigsten präferierte Alternative. Wie kam es dann aber, dass gerade diese Alternative gewählt wurde. Riker zufolge ist das auf einen Zyklus in den Präferenzen zurückzuführen. Bezüglich der Mitglieder des Repräsentantenhauses führt zunächst er folgende Schätzung ihrer Präferenzen an („There is not enough votes to ascertain preference orders, but it is easy to guess what they were.“ (Riker, 1988, S. 227)), wobei *a* für das ursprüngliche Budgetgesetz steht, *b* für das Budgetgesetz mit Wilmot-Klausel und *c* für den status quo:

Abgeordnete	Fraktion	Präferenzen
7	Northern administration Democrats	<i>abc</i>
51	Northern Free Soil Democrats (Wilmot)	<i>bac</i>
8	Border Democrats	<i>abc</i> or <i>acb</i>
46	Southern Democrats	<i>acb</i>
2	Northern Prowar Whigs	<i>cab</i>
39	Northern Antiwar Whigs	<i>cba</i>
3	Border Whigs	<i>bac</i> or <i>bca</i>
16	Southern and Border Whigs	<i>acb</i>

<sup>24</sup>Mangels einer Redezeitbegrenzung ist es im amerikanischen Senat möglich, durch beliebig lange Reden einen Gesetzesentwurf zu blockieren, auch wenn (zunächst) keine Chance besteht, ihn durch eine Abstimmungsmehrheit zu Fall zu bringen. Dieses Vorgehen wird als „filibuster“ bezeichnet.

Quelle: Riker (1988), S. 227.

Aus dieser Schätzung lassen sich die kollektiven Präferenzen ableiten:

1.  $b \succ_K a$ , was wie Riker (leider irrtümlich) glaubt auch das Ergebnis einer der Abstimmungen war, die am 8. August 1846 stattfanden.
2.  $a \succ_K c$ , weil zu erwarten ist, dass die Demokraten ihren Präsidenten unterstützen.
3.  $c \succ_K b$ , auf Grund einer Mehrheit von Südstaatlern, die die Wilmot-Klausel ablehnen und Nordstaaten-Whigs, die den Krieg ablehnen, und dementsprechend, wie Riker glaubt, jede Art von Kriegspolitik der Administration obstruieren.

Es liegt, wenn man dieser Schätzung folgt, also ein Zyklus vor, oder mit Rikers Worten: "So there is a clearcut cyclical majority, which is of course complete disequilibrium." (Riker, 1988, S. 227) Seiner Ansicht nach handelt es sich dabei um den letzten und schließlich erfolgreichen Versuch der Whigs, ein politisches Thema zu konstruieren, mit dem es ihnen gelingen würde die demokratische Partei zu spalten: "the Wilmot Proviso ... may thus be regarded as the final act in the construction of the slavery issue." (Riker, 1988, S. 227). Seine Ansicht, dass das Aufkommen des Sklaverei-Themas vorwiegend strategischen Überlegungen und politischem Opportunismus zu verdanken ist, stützt sich dabei (lediglich) auf einige Tagebuch-Äußerungen des Präsidenten Polk, der den Leuten, die ihm das Regieren schwer machten, allein solch oberflächliche Motive zugestehen mochte.

Was ist von Rikers Deutung zu halten? Folgt man Mackies detaillierter Kritik, dann beruht sie zunächst auf einigen sachlichen Fehlern, deren größter der ist, dass Riker eine Abstimmung über das um die Wilmot-Klausel erweiterte Budget-Gesetz mit einer Abstimmung über die Erweiterung (also nur die Wilmot-Klausel) verwechselt. Dementsprechend deutet Riker ein Abstimmungsergebnis als Ausdruck von  $b \succ_K a$ , welches in Wirklichkeit  $b \succ_K c$  ausdrückt. Die Präferenz  $b \succ_K c$  wird nicht nur durch eine sondern gleich durch mehrere Abstimmungen im Repräsentantenhaus bestätigt (Mackie, 2003, S. 243ff.). Damit ist aber nicht nur Rikers Annahme, dass  $c \succ_K b$ , hinfällig, sondern auch die, dass überhaupt in dieser Frage zyklische Präferenzen vorlagen. Seine Schätzung der Präferenzen der einzelnen Faktionen im Repräsentantenhaus ignoriert vorliegende Abstimmungsergebnisse, durch die sich z.B. die Annahme, die Nordstaaten Whigs hätten als Gegner des Mexiko-Krieges Obstruktionspolitik betrieben, eindeutig widerlegen lässt. Mackie vermutet, dass ihre Haltung eher die gewesen ist, den Krieg abzulehnen, aber den Truppen im Feld dennoch volle Unterstützung zuzusichern,



eine Haltung für die man auch in anderen Kriegen Beispiele findet (Mackie, 2003, S. 248). (sinngemäss kann man die Haltung so ausdrücken: „Wir sind gegen den Krieg, aber wir lassen unsere Jungs trotzdem nicht im Stich!“) Rikers Fehler ist umso peinlicher, als er als Politikwissenschaftler hätte wissen müssen, dass über einen Gesetzesentwurf, bevor er vom Repräsentantenhaus an den Senat weitergeleitet wird, erst noch einmal im Ganzen abgestimmt wird. Peinlich ist der Fehler nicht nur für Riker, sondern auch für diejenigen (vorwiegend Vertreter des Public Choice Ansatzes!), die ihn nicht bemerkt haben. Von Mackie wird dies dementsprechend bissig kommentiert:

Theoretically, any reader should be able to detect the nonsensical error embodied in Riker's claim that  $SQ > WP$  [ $c \succ_K b$ , E.A.] even without going back to check the references to the records of Congress, yet for almost twenty years many intelligent people have repeated this story without reporting the error. I feel that it is my reluctant duty to report a problem with public-choice style of explanation. This style of explanation is often not immediately intuitive yet is gilded with an abstract formalism that suggests that something important and believable is being said. I am not the first to suggest that there is no necessary relationship between formalism and profundity, and that it is just as possible that such models obscure as that they reveal. (Mackie, 2003, S. 246)<sup>25</sup>

Auch Rikers These, dass sich die „Konstruktion“ des Sklaverei-Themas vor allem politisch-taktischem Opportunismus verdankte, und sich dieses Thema in einer Art von natürlichem Selektionsprozess als dasjenige durchgesetzt hat, mit dem es den Whigs gelang ihre Gegner zu spalten, erscheint fragwürdig. Noch Anfang des 19. Jahrhunderts ein von der Politik eher unbeachtetes Thema teilte es in der Mitte des 19. Jahrhunderts das ganze Land in zwei Lager. Sowohl die Presbyterianer als auch Methodisten spalteten sich darüber. (Warum hätten Sie das wegen eines Themas, das aus bloß taktischen Gründen von der Teilen der politischen Klasse „konstruiert“ worden ist, tun sollen?) Dass sich das Thema Sklaverei in der Politik auch mit „opportunistischen“ Erwägungen verband – so lehnte die Free Soil Party die Sklaverei auch wegen der gefürchteten Konkurrenz durch billige Sklavenarbeit ab – schliesst nicht aus, dass es aus Sicht vieler Politiker und anderer Bürger zugleich ein genuin moralisches Anliegen war. Angesichts der Leidenschaftlichkeit, mit der über die Frage der Sklaverei im Vorfeld des Bürgerkriegs gestritten wurde, wirkt Rikers Deutung eher etwas gezwungen.

---

<sup>25</sup>Man müsste auf diesem Fehler nicht herumreiten, wenn es ein Einzelfall wäre. Aber leider sind derartige Schwächen in der empirischen Anwendung des Public Choice-Ansatzes ein häufig anzutreffendes Problem.

### Die Präsidentschaftswahl von 1860

In der Präsidentschaftswahl von 1860 erblickt Riker geradezu eine Wiederholung des – wie wir gesehen haben in Wirklichkeit gar nicht vorhandenen – Ungleichgewichts bei der Entscheidung über die Wilmot-Klausel. Bei der Präsidentschaftswahl von 1860 traten vier Kandidaten an, Abraham Lincoln (Republican Party), Stephen Douglas (Northern Democrats), John Breckinridge (Southern Democrats), John Bell (Constitutional Union Party). Abraham Lincoln gewann die Wahl obwohl auf Douglas die meisten Stimmen entfielen. Dieses Phänomen ist leicht durch das amerikanische Wahlsystem zu erklären, bei dem zunächst innerhalb der einzelnen Bundesstaaten über den Präsidenten abgestimmt wird,<sup>26</sup> und die dann Wahlmänner in das bundesweite Wahlmännerkollegium (“electoral college”) entsenden, das dann den Präsidenten wählt. In der Regel stimmen *alle* Wahlmänner desselben Bundesstates für den Kandidaten, auf den im Bundesstaat die meisten Stimmen entfallen sind, was zu erheblichen Verzerrungen des Ergebnisses führen kann und in diesem Fall auch geführt hat.

Riker glaubt, dass darüber hinaus die kollektiven Präferenzen der Amerikaner bezüglich drei der vier Präsidentschaftskandidaten in einem Zyklus gefangen waren, dass also  $Douglas \succ_K Lincoln \succ_K Bell \succ_K Douglas \succ_K Breckinridge$  galt. In Ermangelung von zuverlässigen Daten über die Präferenzen über alle vier Kandidaten<sup>27</sup> rechtfertigt Riker seine These wiederum mit einer Schätzung der vollen Präferenzen, die er nach Regionen aufschlüsselt. (Riker, 1988, S. 230/231) Wie er zu seiner Schätzung kommt, bleibt im Dunkeln. Mit seiner Schätzung ergibt sich aber der von ihm behauptete Zyklus. In den Fällen, in denen das Condorcet-Verfahren (paarweise Stichwahl über alle Paare von Alternativen) einen Zyklus zu Tage fördert, hat das die Folge, das unterschiedliche, wenn auch jeweils mit gutem Recht als demokratisch angesehene Wahlverfahren zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. Riker führt mehrere solcher Verfahren und die sich aus ihnen ergebenden kollektiven Präferenzen an:

1. Mehrheitswahlrecht:  $Lincoln \succ Douglas \succ Breckinridge \succ Bell$
2. Paarweiser Vergleich (Condorcet):  $Douglas \succ Lincoln \succ Bell \succ Douglas \succ Breckinridge$
3. Borda Zählung (siehe Aufgabe 3):  $Douglas \succ Bell \succ Lincoln \succ Breckinridge$

---

<sup>26</sup> Zu Lincolns Zeiten galt das noch nicht für alle Bundesstaaten. In South Carolina etwa entschied die politische Elite statt der Bürger für welchen Präsidenten die Wahlmänner votieren sollten.

<sup>27</sup> Bekannt ist nur, welcher Kandidat in den einzelnen Regionen an die Spitze kam

4. Wahl durch Zustimmung (zwei Stimmen): *Bell*  $\succ$  *Lincoln*  $\succ$  *Douglas*  $\succ$  *Breckinridge*
5. Wahl durch Zustimmung (drei Stimmen): *Douglas*  $\succ$  *Bell*  $\succ$  *Lincoln*  $\succ$  *Breckinridge*

Bei fünf unterschiedlichen Wahlsystemen gewinnt Douglas zweimal, sonst jedesmal ein anderer. Damit kann Riker seine These der Sinnlosigkeit der sozialen Wahl stützen (im Falle eines Ungleichgewichts und zugleich im Allgemeinen, wenn man mit Riker annimmt, dass solche Ungleichgewichte häufig vorkommen). Selbst wenn man nämlich die Lincoln-Wahl mit Hinweis auf das amerikanische Mehrheitswahlsystem, das bekanntermaßen zu starken Verzerrungen führen kann, kritisiert, so zeigt sich, wenn man Riker folgt, dass ein „besseres“ Wahlsystem hier auch keine Abhilfe schafft, da unterschiedliche „bessere“ Wahlsysteme zu unterschiedlichen Ergebnissen führen, womit jedes Ergebnis als ein zufälliges Artefakt des jeweiligen Wahlsystems erscheint.

Mackies Kritik an Rikers Analyse fällt ziemlich elaboriert aus. Das hängt damit zusammen, dass auch Mackie nicht um das Problem herum kommt, dass wir über keine zuverlässigen Daten über die vollen Präferenzen der Bürger bezüglich ihrer vier Kandidaten verfügen, die er aber ebenso benötigen würde, um Riker widerlegen zu können, wie Riker sie bräuchte, um seine These aufzustellen. Eine der wichtigsten Annahmen von Riker ist dabei die, dass die meisten Lincoln-Wähler Bell und nicht Douglas an die zweite Stelle setzten. Mackie zieht für seine, von Riker abweichende Schätzung, drei unterschiedliche Informationsquellen heran: 1. Das historische Wissen über die damals verbreiteten politischen Standpunkte. 2. Aggregierte Daten auf Landkreis, Staats- und Sektionsebene. 3. Die aus einer anderen Studie übernommenen Ergebnisse einer Umfrage unter Fachhistorikern dieser Epoche bezüglich der vermuteten Präferenzordnung der damaligen Wähler. (Mackie, 2003, S. 277) Im Ergebnis kommt Mackie dabei zu einer anderen Präferenzordnung aus der sich kein Zyklus der nach dem Condorcet-Verfahren abgeleiteten kollektiven Präferenzen mehr ergibt. Bis auf das Mehrheitswahlrecht, dessen Schwächen hinlänglich bekannt sind, liefern alle von Riker zum Vergleich herangezogenen Verfahren dasselbe Ergebnis: Douglas hätte die Wahl gewinnen müssen. Von einem Ungleichgewicht keine Spur.

Um dieses Thema abzuschließen, könnte man angesichts der Tatsache, dass Lincoln eine Wahl gewonnen hat, in der ein anderer Kandidat, nämlich Douglas, die meisten Stimmen erhielt, könnte man immer noch die Frage an Rikers These der „Zufälligkeit“ demokratischer Entscheidungen angelehnte Frage aufwerfen, ob nicht der Bürgerkrieg auch ein Artefakt der amerikanischen Mehrheitswahlsystems gewesen ist. Oder anders gefragt: Was wäre

geschehen, wenn Douglas die Wahl gewonnen hätte? Kontrafaktische historische Überlegungen sind immer eine heikle Sache, denn wir verfügen ebenso wenig über das Wissen, das uns ermöglichen würde, die Möglichkeit oder Wahrscheinlichkeit alternativer Geschichtsverläufe zuverlässig einzuschätzen, wie wir die Geschichte vorher sagen können. Trotzdem sollen zu dieser Frage einige Überlegungen angeführt werden: 1. Die Polarisierung des Landes durch die Sklavereifrage, war nicht die Folge einer oder weniger einzelner, möglicherweise zufälliger politischer Entscheidungen, sondern einer ganzen Reihe von sozialen, wirtschaftlichen und politischen Vorgängen. Insofern war sie für eine gewisse Zeit eine relativ stabile Konstante der amerikanischen Politik. 2. Douglas vertrat in der Sklavereifrage die Doktrin der “popular sovereignty”, der zufolge die neu hinzugekommenen Territorien darüber auf lokaler Ebene selbst entscheiden sollten. Diese Politik hatten auch die meisten Präsidenten vor Lincoln verfolgt, in der Hoffnung durch diese sehr politische Haltung die Wogen glätten und die Streitfrage auf Bundesebene entschärfen zu können. Diese Hoffnung hatte sich schon vorher als trügerisch erwiesen. Am Vorabend der Wahl waren die Südstaatler kaum noch bereit, sich mit dem vermittelnden Standpunkt Douglas’ zufrieden zu geben, was auch daran deutlich wird, dass die Southern Democrats mit Breckinridge einen Kandidaten aufstellten, der einen viel entschiedeneren Pro-Sklaverei Standpunkt vertrat. Insofern ist es fragwürdig ob Douglas als Gewinner der Wahl die Sezession der Südstaaten hätte verhindern können. 3. Letzteres gilt umso mehr als Lincoln die Bereitschaft signalisierte, den Südstaaten weitgehend entgegen zu kommen, auch in der Sklavereifrage. Nur an einer Forderung hielt er unverbrüchlich fest: Die Sezessionisten müssten sich wieder in die Union eingliedern. Wenn diese – natürlich sehr spekulativen – Überlegungen stimmen, dann hätte ein anderes Wahlsystem (und damit ein anderer Präsident) an der Sezession und dem darauf folgenden Bürgerkrieg nichts geändert. Der weitere Verlauf der amerikanischen Geschichte wäre dann in jedem Fall kein “zufälliges” Artefakt des Wahlsystems mehr gewesen.

## 2.4 Fazit

Wie wir gesehen haben ist weder die Kritik der identären Demokratie noch die These des “demokratischen Irrationalismus”, soweit sich beide auf Ergebnisse des Public Choice Ansatzes wie etwa den Satz von Arrow stützen, besonders überzeugend. Insbesondere bei der empirischen Anwendung seiner Ergebnisse zeigt der Public Choice Ansatz bisher noch erhebliche Schwächen. Insofern dies, wie bei Riker, sehr häufig auch mit handwerklicher Schlamperei zu tun hat, besteht natürlich Hoffnung, dass sich dies bei einer umsichtigeren

Interpretation und Anwendung der Ergebnisse noch ändern könnte. Gerry Mackie, auf dessen Kritik an Riker ich hier zurückgegriffen habe, versteht sich selbst deshalb auch nicht als Kritiker des Public Choice Ansatzes, sondern möchte der politik- und demokratieskeptischen Sichtweise einen “konstruktiven” Public-Choice Ansatz entgegenstellen, bei dem nicht unter Berufung auf Arrow die Demokratie grundsätzlich in Frage gestellt wird, sondern die Social Choice bzw. Public Choice Theorie genutzt wird, um für unterschiedliche Situationen möglichst optimale demokratische Abstimmungs- und Verfahrensweisen zu entwerfen. Der Satz von Arrow zeigt, dass dies ganz ohne Kompromisse nicht möglich ist, aber gerade das macht die Aufgabe spannend.

Meine eigene Meinung über Public Choice ist etwas skeptischer: Der Ansatz mag für Spezialthemen, wie die Analyse von Wahlsystemen geeignet sein. Abgesehen davon ist er weder für die Politikwissenschaft noch für die politische Philosophie besonders relevant, ganz einfach, weil sich die meisten Vorgänge in der Politik mit dem Begriffsrepertoire von Public Choice überhaupt nicht angemessen erfassen und artikulieren lassen. Wer etwas über politische Philosophie oder darüber, nach welchen Gesetzen Politik abläuft, sollte nach den Werken aus dem Bereich “Public Choice” deshalb höchstens als allerletztes greifen.

Aber natürlich kann man auch eine andere Meinung dazu vertreten. Und wer mehr über die gegenteilige Meinung erfahren möchte, der kann zum Beispiel zu den Werken von Riker (Riker, 1988) oder dem Public-Choice-Kompendium von Dennis Mueller (Mueller, 2003) greifen. Um sich über den methodischen Wert von Public Choice ein Bild zu machen empfehle ich als Vergleich, besonders zu Riker, die Lektüre eines Werkes wie Giovanni Sartoris “Demokratietheorie” (Sartori, 1997 (zuerst: 1987)). Es bietet sich zum Vergleich deshalb besonders an, weil der Autor politisch eine ähnliche liberale Richtung vertritt wie Riker, weil das Werk in derselben Zeit wie Rikers wichtigste Bücher entstanden ist, und weil es andererseits aber auf die Formalismen des Public Choice Ansatzes völlig verzichtet und statt dessen einen rein verbalen Diskurs über die Themen Demokratie und Liberalismus führt. Unnötig zu sagen, dass ich das Buch Sartoris für viel gehaltvoller und dessen politikphilosophischen statt des mathematischen-formalen Ansatzes inhaltlich für sehr viel fruchtbarer halte. Aber darüber ist jeder aufgerufen, sich eine eigene Meinung bilden.

### 2.4.1 Aufgaben

1. Eignet sich der Satz von Arrow – wenn überhaupt – eher zur Kritik individualistischer oder kollektivistischer Politikkonzeptionen? Warum?
2. Ein Vorschlag, um die Probleme zu umgehen, die aus zyklischen kollektiven Präferenzen entstehen, besteht darin, zwischen den in einem Zyklus erfassten Gütern einfach Indifferenz anzunehmen (QUELLEN-ANGABE). Wenn also  $a \succ_K b \succ_K c \succ_K a$ , dann setze man einfach  $a \sim_K b \sim_K c$  fest und eliminiere dadurch den Zyklus. Warum wird durch dieses Verfahren das Prinzip der *paarweisen Unabhängigkeit* verletzt?
3. Bei der *Borda-Zählung* wird jedem Gut in den individuellen Präferenzen eine Rangzahl zugewiesen (ähnlich wie bei der Rangordnungsregel für Entscheidungen unter Unwissenheit, Seite 37). Die Rangzahlen für jedes Gut werden dann zusammengezählt und aus der Summe die Platzierung in den kollektiven Präferenzen bestimmt. Zeige:
  - (a) Bei der Borda-Zählung können anders als beim Condorcet-Verfahren keine transitiven kollektiven Präferenzen entstehen.
  - (b) Die Borda-Zählung verletzt das Prinzip der paarweisen Unabhängigkeit (Seite 91f.).
4. Man könnte sich für Rikers Sichtweise, dass demokratische Entscheidungsverfahren nicht das leisten (können), was sie leisten sollen, nämlich den Willen der Mehrheit, des Volkes etc. zum Ausdruck zu bringen, auch andere Argumente überlegen, die sich nicht auf den Public Choice Ansatz stützen. Diskutieren Sie die folgenden beiden:
  - (a) Bei der Bundestagswahl können die Bürger gar nicht ihre Präferenzen zu den verschiedenen politischen Themen zum Ausdruck bringen, sondern müssen sich zwischen einer kleinen Zahl von Gesamtpaketen entscheiden. Insofern kann von echter Demokratie keine Rede sein.
  - (b) Eine häufig zu hörende Klage: Die Programme der großen Parteien unterscheiden sich im Grunde kaum noch voneinander. Alle tendieren zur Mitte hin. Wo bleibt für den Wähler da noch die Möglichkeit sich zu entscheiden?

# Kapitel 3

## Wahrscheinlichkeitsrechnung

### 3.1 Wahrscheinlichkeiten I: Rechentechniken

#### 3.1.1 Einführung

##### Zielsetzung

In dieser und der folgenden Woche werden die mathematischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie besprochen, die für die Theorie der Entscheidungen unter Risiko (d.h. solchen Entscheidungen, bei denen wir im Gegensatz zu Entscheidungen unter Unwissenheit die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Zustände oder Zufallsereignisse kennen) benötigt werden.

Folgendes steht auf dem Programm:

1. Herleitung der wesentlichen Gesetze der elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie, also insbesondere:
  - (a) *Wahrscheinlichkeit von „und“-verknüpften Ereignissen*: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei möglichen Zufallsereignissen, deren jeweilige Wahrscheinlichkeit bekannt ist, beide eintreten?
  - (b) *Wahrscheinlichkeit von „oder“-verknüpften Ereignissen*: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei möglichen Ereignissen das eine oder das andere eintritt?
  - (c) *Bedingte Wahrscheinlichkeit*: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis eintritt, dass von einem anderen abhängt, unter der Bedingung, dass das andere Ereignis schon eingetreten ist? Und im Gegensatz dazu, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es überhaupt, also ohne diese Bedingung, eintritt?

2. Der Satz von Bayes. Das Theorem von Bayes ist grundlegend für die Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten und hat zahlreiche Anwendungen in der Statistik, der Entscheidungstheorie und der Philosophie.

Am Ende dieses Kapitel wird jeder Aufgaben wie die folgende mühelos lösen können:

Ca. 3% aller 70-jährigen haben Alzheimer. Auch wenn Alzheimer bisher nicht geheilt werden kann, ist die Früherkennung eine wichtige Voraussetzung für vorbeugende, den Krankheitsverlauf evtl. mildernde Maßnahmen. Leider lässt sich Alzheimer nur schwer präzise diagnostizieren. (Erst durch Gewebeuntersuchungen am verstorbenen Patienten lässt sich mit Sicherheit feststellen, ob eine Alzheimererkrankung vorlag.) Angenommen einmal, die Forschung hätte einen Gedächtnistest entwickelt, durch den eine vorliegende Alzheimererkrankung mit 95%-iger Sicherheit diagnostizierbar ist, an dem im Durchschnitt aber auch 2% der älteren Menschen scheitern, selbst wenn sie nicht an Alzheimer erkrankt sind.

Angenommen, Sie sind Ärztin oder Arzt und untersuchen einen 70-jährigen Patienten mit Hilfe des Gedächtnistests. Es zeigt sich, dass der Patient nicht mehr in der Lage ist, die Aufgaben des Tests zu lösen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Patient an Alzheimer erkrankt ist?

Um es vorweg zu nehmen: Die Antwort „95%“ ist falsch! Aber warum? Dafür eben benötigt man die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

### Was sind Wahrscheinlichkeiten?

Empirische  
Typen von  
Wahrscheinlichkeiten

Bevor aber auf das mathematische Kalkül der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingegangen wird, ist zunächst etwas zu der Frage zu sagen, was Wahrscheinlichkeiten eigentlich sind. Es gibt drei Arten von Phänomenen, auf die man das Wahrscheinlichkeitskalkül anwenden kann:

1. *Häufigkeiten* bei einer größeren Menge oder Folge von Ereignissen. So besagt die Aussage, dass ein 70-jähriger mit 3%-iger Wahrscheinlichkeit an Alzheimer leidet, nichts weiter, als dass eben unter den 70-jährigen die Alzheimerkrankheit mit einer Häufigkeit von 3% auftritt. (Jeder einzelne 70-jährige dagegen hat die Alzheimerkrankheit oder auch nicht.



Aber kein 70-jähriger hat 3% Alzheimer.) Die Wahrscheinlichkeitsaussage bezieht sich in diesem Fall also nur auf die Häufigkeit eines Zustands in einer Gesamtheit.

2. *Glaubensgrade* oder auch „subjektive Wahrscheinlichkeiten“: Wenn eine Ärztin einen Patienten dem oben beschriebenen Gedächnistest unterzogen hat, und nun (mit Hilfe des Bayes’schen Lehrsatzes) die korrekte Wahrscheinlichkeit berechnet hat, mit der der Patient an Alzheimer erkrankt ist, dann wird sie oder er genau in dem Grad davon überzeugt sein, dass der Patient an Alzheimer leidet, der dieser Wahrscheinlichkeit entspricht. Wiederum gilt: Der Patient hat entweder Alzheimer oder kein Alzheimer. Die Wahrscheinlichkeit sagt bei genauer Auslegung nur etwas darüber aus, bis zu welchem Grad man davon ausgehen muss, dass eine Alzheimererkrankung vorliegt.
3. *Objektive Wahrscheinlichkeiten* (Propensitäten): Die Wahrscheinlichkeit kann aber auch die inhärente Eigenschaft eines einzelnen Vorgangs beschreiben. So hat die Wahrscheinlichkeit, beim Würfeln eine Sechs zu würfeln, offensichtlich etwas mit dem symmetrischen Aufbau des Würfels zu tun. Man kann die Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu würfeln, daher als eine objektive Eigenschaft des Vorgangs eines Würfelwurfs betrachten.<sup>1</sup>

Die Tatsache, dass man auf alle drei Klassen von Phänomenen ein- und dasselbe wahrscheinlichkeitstheoretische Kalkül anwendet – zudem es übrigens, sofern man seine Anwendung auf den entsprechenden empirischen Phänomenbereich überhaupt zugesteht, keine Alternative gibt – darf nicht darüber hinwegtäuschen, dass es sich – empirisch betrachtet – um sehr unterschiedliche Phänomene handelt. Das gilt trotz der Tatsache, dass die Interpretation, um welche Art von (empirischer) Wahrscheinlichkeit es sich handelt, nicht in jedem Fall eindeutig oder zwingend ist. So kann man die Wahrscheinlichkeit, beim Würfeln eine Sechs zu würfeln statt als Propensität

---

<sup>1</sup>Dagegen könnte eingewandt werden, dass beim Würfeln als einem nach der klassischen Mechanik streng deterministisch zu beschreibenden Vorgang das Ergebnis schon vorherbestimmt ist, so dass man nicht im wörtlichen Sinne von einer „objektiven Wahrscheinlichkeit“ seines Eintretens sprechen könne. Da es aber andererseits noch nie jemanden gelungen ist, Würfelwürfe tatsächlich vorherzusagen, so spricht – ungeachtet der Beschreibung des Systems durch eine deterministische Theorie – nichts dagegen, den Ausgang des Würfelwurfs als objektiv zufällig zu betrachten. Mit dieser Interpretation folge ich der (allerdings etwas umstrittenen) Theorie von Nancy Cartwright, der zufolge (natur-)wissenschaftliche Theorien nur bei den Vorgängen überhaupt gültig sind, an denen man sie auch nachweisen kann (Cartwright, 1999).

des Systems „Würfel“ auch als Häufigkeit verstehen, mit der bei einer großen Anzahl von Würfeln die Sechs auftritt.

### 3.1.2 Grundlegende Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wenn wir in der Entscheidungstheorie von Wahrscheinlichkeiten sprechen, dann sind fast immer die Wahrscheinlichkeiten von Zuständen oder von Zufallsereignissen gemeint. Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $E$  schreibt man:

$$P(E) = a \quad 0 \leq a \leq 1$$

Lies: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis  $E$  eintritt beträgt  $a$ . Statt über die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen zu reden, können wir ebensogut über die Wahrscheinlichkeit der Wahrheit von Aussagen reden, die besagen, dass ein Ereignis eintritt. Wenn  $q$  die Aussage ist, dass das Ereignis  $E$  eintritt, dann ist mit

Definition der  
Wahrschein-  
lichkeit

$$P(q) = a \quad 0 \leq a \leq 1$$

die Wahrscheinlichkeit beschrieben, dass die Aussage  $q$  wahr ist. Da  $q$  aussagt, dass  $E$  eintritt, ist diese Wahrscheinlichkeit natürlich genau dieselbe wie diejenige, dass  $E$  eintritt. Spricht man von den Wahrscheinlichkeiten von Aussagen über Ereignisse, so erlaubt dies ohne weitere Umstände die aussagenlogischen und modallogischen<sup>2</sup> Verknüpfungen von Aussagen anzuwenden und die Wahrscheinlichkeiten von aussagenlogisch verknüpften Aussagen zu bestimmen. Aber im Grunde handelt es sich dabei nur um eine andere Rede-weise. Besonders in der mathematischen Literatur zur Wahrscheinlichkeitstheorie ist es darüber hinaus auch üblich den Wahrscheinlichkeitsbegriff in Bezug auf Ereignismengen zu definieren, die die Teilmengen eines Ereignisraums sind, wobei man zusammengesetzte Ereignisse noch einmal von Elementarereignissen unterscheidet (Bosch, 1999, S. 1ff.). Der Einfachheit halber beschränken wir uns, Resnik folgend (Resnik, 2000, S. 45ff.), hier meist aber auf die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen bzw. Aussagen über Ereignisse.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde 1993 von dem russischen Mathematiker Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow axiomatisiert. Seitdem beruht die gesamte Wahrscheinlichkeitsrechnung auf folgenden drei (harmlos wirkenden) Axiomen:

Kolmogorow-  
Axiome

<sup>2</sup>Während die Aussagenlogik nur die Wahrheit und Falschheit von Aussagen einbezieht, behandelt die Modallogik auch solche Eigenschaften wie die *Möglichkeit* und *Notwendigkeit* von Aussagen. So ergibt sich in der Modallogik z.B. dass die Negation einer Aussage, die *unmöglich* wahr sein kann, *notwendig* wahr ist.

**Axiom 1:** Für die Wahrscheinlichkeit  $P(p)$  eines Ereignisses  $p$  gilt:

$$0 \leq P(p) \quad P(p) \in \mathbb{R}$$

**Axiom 2:** Wenn  $p$  sicher ist, dann gilt:

$$P(p) = 1$$

**Axiom 3:** Wenn die Ereignisse  $p$  und  $q$  sich ausschließen, dann gilt:

$$P(p \vee q) = P(p) + P(q)$$

Sofern die Menge möglicher Ereignisse abzählbar unendlich viele Ereignisse enthält, ersetzt man Axiom 3 durch:

**Axiom 3':** Seien  $p_1, p_2, \dots$  höchstens abzählbar unendlich viele Ereignisse und paarweise unvereinbar, dann gilt:

$$P(\bigvee p_i) = P(p_1 \vee p_2 \vee \dots) = P(p_1) + P(p_2) + \dots = \sum P(p_i)$$

Es ist bemerkenswert, dass man mit diesen drei Axiomen auskommt, und dass sich alle anderen Gesetze für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten daraus ableiten lassen. Insbesondere kann man aus diesen Axiomen relativ unmittelbar folgende *Corrolarien* ableiten:

Elementare  
Gesetze

1.  $P(\neg p) = 1 - P(p)$  (*inverse Wahrscheinlichkeit*)

Beweis: Da  $p \vee \neg p$  sicher ist, gilt nach Axiom 2:  $P(p \vee \neg p) = 1$ . Da  $p$  und  $\neg p$  sich ausschließen, kann man Axiom 3 anwenden:

$$P(p) + P(\neg p) = P(p \vee \neg p) = 1$$

Daraus folgt unmittelbar:  $P(\neg p) = 1 - P(p)$

2. Wenn  $q$  unmöglich, dann  $P(q) = 0$  (*Null-Wahrscheinlichkeit*)

Beweis: Wenn  $q$  unmöglich ist, dann ist  $\neg q$  sicher. Damit ergibt sich aus dem vorhergehenden und Axiom 2:

$$P(q) = 1 - P(\neg q) = 1 - 1 = 0$$

3. Wenn  $p$  aus  $q$  folgt, dann  $P(q) \leq P(p)$  (*Monotonie*)

Beweis: Wenn  $p \leftarrow q$ , dann gilt  $p \Leftrightarrow q \vee (\neg q \wedge p)$ . Da aber auch gilt, dass  $q$  und  $(\neg q \wedge p)$  sich ausschließen, ist die Voraussetzung von Axiom 3 erfüllt und wir können folgern, dass:

$$P(p) = P(q) + P(\neg q \wedge p)$$

Da wegen Axiom 1 sowohl  $P(q) \geq 0$  als auch  $P(\neg q \wedge p) \geq 0$ , können wir daraus folgern, dass  $P(q) \leq P(p)$ . (Da es nicht strikt ausgeschlossen ist, dass  $\neg q \wedge p$  wahr ist, kann es in der Tat auch Fälle geben in denen  $<$  also *echt kleiner* gilt.)

4.  $P(p) \leq 1$  (*obere Grenze der Wahrscheinlichkeit*)

Beweis: Logisch betrachtet folgt ein sicheres Ereignis  $q$  aus jedem Ereignis  $p$ . (Da  $q$  als sicheres Ereignis immer gilt, gilt es insbesondere auch wenn  $p$  gilt.) Für jedes Ereignis  $p$  gilt also  $P(p) \leq P(q)$ , wenn  $q$  sicher ist. Da nach dem 2. Axiom  $P(q) = 1$ , folgt die Behauptung.

5.  $P(q \vee p) = P(q) + P(p) - P(q \wedge p)$  (*oder-verknüpfte Ereignisse*)

Beweis: Da  $q \vee p$  äquivalent ist mit  $q \vee (\neg q \wedge p)$  und  $q$  und  $\neg q \wedge p$  sich ausschließen, gilt nach Axiom 3:

$$P(q \vee p) = P(q \vee (\neg q \wedge p)) = P(q) + P(\neg q \wedge p)$$

Da aber weiterhin  $p \Leftrightarrow (q \wedge p) \vee (\neg q \wedge p)$  und auch  $q \wedge p$  und  $\neg q \wedge p$  sich ausschließen, gilt wiederum nach Axiom 3:

$$P(p) = P((q \wedge p) \vee (\neg q \wedge p)) = P(q \wedge p) + P(\neg q \wedge p)$$

Dies lässt sich umformen zu:

$$P(\neg q \wedge p) = P(p) - P(q \wedge p)$$

Indem wir den Term  $P(\neg q \wedge p)$  in der ersten Gleichung durch diesen Ausdruck ersetzen erhalten wir die Behauptung.

Der „Sinn“ der meisten dieser Corrolarien dürfte relativ einleuchtend sein. Etwas verblüffend könnte höchstens die Monotoniebedingung (3.) erscheinen. Wenn  $p$  aus  $q$  folgt ( $q \rightarrow p$ ), warum gilt dann, dass die Wahrscheinlichkeit von  $q$  kleiner ist als die von  $p$  ( $P(q) \leq P(p)$ ) und nicht umgekehrt? Man kann sich das folgendermaßen klar machen:  $q$  ist eine *hinreichende*, aber keine notwendige Voraussetzung von  $p$ . Immer wenn  $q$  gegeben ist, ist damit auch  $p$  gegeben. Aber umgekehrt kann  $p$  auch gegeben sein, ohne dass  $q$  gegeben ist. So gesehen ist  $p$  wahrscheinlicher als  $q$ .

Alle oben aufgeführten Gesetzmäßigkeiten betreffen unbedingte Wahrscheinlichkeiten. Als nächstes ist der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit einzuführen. Mit

$$P(p|q)$$

bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $p$  unter der Bedingung, dass das Ereignis  $q$  eingetreten ist.

Mathematisch kann die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(p|q)$  durch folgende Definition eingeführt werden:

Bedingte  
Wahrscheinlichkeit

$$P(p|q) := \frac{P(p \wedge q)}{P(q)} \quad P(q) > 0$$

In Umgangssprache übertragen bedeutet dies, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit als die Wahrscheinlichkeit definiert ist, mit der beide Ereignisse (das Bedingte und das Bedingende) eintreten, geteilt durch die Wahrscheinlichkeit, dass die Bedingung eintritt. Für den Fall, dass  $P(q) = 0$ , setzt man üblicherweise  $P(p|q) := 0$ . Diese Festsetzung ist möglich und sinnvoll, weil damit immer noch das unten angegebene Multiplikationsgesetz erfüllt ist.

Wenn es sich dabei um die „Definition“ bedingter Wahrscheinlichkeit handelt, dann könnte man die Frage aufwerfen, warum man die bedingte Wahrscheinlichkeit gerade so definieren soll und ob man sie nicht auch anders definieren könnte. Betrachtet man die Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht allein als eine rein mathematische Disziplin, in welchem Falle die Definition in der Tat willkürlich wäre, solange sie nicht den vorher (ebenso willkürlich) festgelegten Axiomen widerspricht, dann muss der Rechtfertigungsgrund für diese Definition genauso wie für die vorhergehenden Kolmogorowschen Axiome in letzter Instanz ein empirischer sein: Die Axiome und Definitionen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind gültig, insofern sich damit Gesetzmäßigkeiten empirischer Wahrscheinlichkeitsphänomene richtig erfassen lassen. Andernfalls wären sie nicht mathematisch falsch aber empirisch unanwendbar. (Das selbe gilt übrigens für alle Bereiche der Mathematik, sogar für das Rechnen mit natürlichen Zahlen. Empirisch betrachtet, ist  $2 + 2 = 4$ , weil zwei Äpfel und noch zwei Äpfel vier Äpfel sind und weil zwei Häuser und noch zwei Häuser vier Häuser sind, usf. Gäbe es irgendeinen Planeten auf dem zwei Äpfel und noch zwei Äpfel fünf statt vier Äpfel sind, dann wäre damit nicht die Mathematik natürlicher Zahlen widerlegt, aber sie wäre auf diesem Planeten unanwendbar. Wem das Beispiel zu abwegig vorkommt, der mag sich überlegen, dass die einfache Additivität schon bei Volumengrößen nicht gegeben ist. Wenn man 1 Liter Alkohol und 1 Liter Wasser mischt, dann bekommt man nicht etwa  $1 + 1 = 2$  Liter Alkohol-Wasser-Gemisch, sondern etwas weniger als 2 Liter! Ob und worauf sich die Gesetze der Addition, Subtraktion,

Multiplikation etc. anwenden lassen ist also eine rein empirische Frage. A priori lässt sich nur beweisen, dass  $1 + 1 = 2$ ,<sup>3</sup> aber nicht dass eine Mengeneinheit von irgendetwas (z.B. Flüssigkeit) plus noch eine Mengeneinheit von irgendetwas zwei Mengeneinheiten von irgendetwas sind.)

Multiplikationsgesetz

Um nun aber die oben aufgeführte Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit noch etwas besser zu motivieren, kann man darauf hinweisen, dass sich aus ihr unmittelbar das uns schon zuvor bekannte (oder wie man riskanterweise auch manchmal behauptet: das uns intuitiv einleuchtende) Gesetz für die *Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten* von und-verknüpften Ereignissen ergibt:

$$P(p \wedge q) = P(p) \cdot P(q|p)$$

Wegen der Kommutativität des logischen und-Operators „ $\wedge$ “ ergibt sich daraus unmittelbar auch:

$$P(p \wedge q) = P(q \wedge p) = P(q) \cdot P(p|q)$$

Beim Gesetz der Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten ist zu beachten, dass die Wahrscheinlichkeit des einen Ereignisses die unbedingte Wahrscheinlichkeit ist, die des anderen Ereignisses aber stets die Wahrscheinlichkeit unter der Bedingung, dass das eine Ereignis eingetreten ist.

Dieser Zusammenhang wird bei empirischen Beispielen manchmal verdeckt. Berechnet man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, dass man bei zwei Münzwürfen beidemale hintereinander Zahl erhält, so würde man  $1/2$  mal  $1/2$  rechnen, also scheinbar  $P(p) \cdot P(q)$  rechnen, wenn mit  $p$  die Aussage „Beim ersten Wurf lag die Zahl oben“ und mit  $q$  die Aussage „Beim zweiten Wurf lag die Zahl oben“ gemeint ist. Aber auch hier muss man Korrekterweise  $P(p) \cdot P(q|p)$  rechnen, nur sind beim Münzwurf die Ereignisse  $p$  und  $q$  unabhängig, so dass – wiederum per Definition für unabhängige Ereignisse (siehe unten) – gilt  $P(q|p) = P(q)$ , womit die Rechnung  $P(p) \cdot P(q|p)$ , wenn man Zahlen einsetzt, eben genauso aussieht wie die Rechnung  $P(p) \cdot P(q)$ . In Wirklichkeit ist es aber eine andere Rechnung.

Deutlicher wird dies an einem zweiten Beispiel: Zu berechnen sei die Wahrscheinlichkeit, dass ein Unternehmen  $U$  eine Gewinnwarnung ausgibt *und* der Aktienkurs von  $U$  dennoch steigt. Wenn  $q$  die Aussage ist „ $U$  gibt eine Gewinnwarnung aus“ und  $p$  die Aussage „Der Aktienkurs von  $U$  steigt“ und  $p|q$  die Aussage „Der Aktienkurs von  $U$  steigt, nachdem eine Gewinnwarnung ausgegeben wurde“, dann ist recht offensichtlich, dass man, um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass eine Gewinnwarnung ausgegeben wird *und*

<sup>3</sup>Dergleichen lässt sich tatsächlich beweisen. Näheres dazu auf: <http://us.metamath.org/mpegif/mmset.html\#trivia>. Ich bin Matthias Brinkmann für den Hinweis auf diese Webseite dankbar!

der Aktienkurs steigt, rechnen muss  $P(p \wedge q) = P(q) \cdot P(p|q)$ . Denn wenn schon einmal eine Gewinnwarnung ausgegeben wurde, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Aktienkurs trotzdem steigt, natürlich eine ganz andere als die, dass der Aktienkurs einfach so steigt.

Aus dem Gesetz der Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten und-verknüpfter Ereignisse ergibt sich eine naheliegende Definition für die Unabhängigkeit von Ereignissen. Zwei Ereignisse  $p$  und  $q$  sind *statistisch unabhängig*, wenn:

$$P(p \wedge q) = P(p) \cdot P(q)$$

Statistische  
Unabhängig-  
keit

Da das Gesetz der Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten bereits besagt, dass  $P(p \wedge q) = P(p) \cdot P(q|p) = P(q) \cdot P(p|q)$ , so folgt für unabhängige Ereignisse unmittelbar:

$$P(p|q) = P(p) \quad \text{und} \quad P(q|p) = P(q)$$

In Worte gefasst sind zwei Ereignisse also dann statistisch unabhängig voneinander, wenn sie als Bedingung des anderen keinen Einfluss auf die Größe von dessen Wahrscheinlichkeit ausüben. Wenn man mit  $p|q$  das Ereignis  $p$  unter der Bedingung von  $q$  darstellt, so ist damit noch nicht ausgeschlossen, dass das Ereignis  $p$  unabhängig von der Bedingung  $q$  ist. (Umgangssprachlich würden wir freilich nur von den Bedingungen eines Ereignisses sprechen, wenn das Ereignis gerade nicht unabhängig davon ist. Andernfalls würden wir den Ausdruck „Bedingung“ wahrscheinlich nicht verwenden. Die Fachsprache deckt sich hier, wie so oft, nicht mit der Umgangssprache!)

Sind  $p$  und  $q$  statistisch unabhängig von einander, dann gilt auch, dass  $p$  und  $\neg q$  statistisch unabhängig sind.

*Beweis:*

$$p \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

Da  $(p \wedge q)$  und  $(p \wedge \neg q)$  einander ausschließen, gilt nach Axiom 3:

$$P(p) = P((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) = P(p \wedge q) + P(p \wedge \neg q)$$

Das lässt sich umformen zu:

$$P(p \wedge \neg q) = P(p) - P(p \wedge q)$$

Da nach Voraussetzung  $p$  und  $q$  statistisch unabhängig sind, gilt:  $P(p \wedge q) = P(p) \cdot P(q)$ . In der vorhergehenden Gleichung dürfen wir also  $P(p \wedge q)$  durch  $P(p)P(q)$  ersetzen und erhalten:

$$P(p \wedge \neg q) = P(p) - P(p)P(q) = P(p) \cdot (1 - P(q))$$

Nach Corrolar 1 ist aber  $1 - P(q) = P(\neg q)$ . Somit erhalten wir:

$$P(p \wedge \neg q) = P(p)P(\neg q)$$

Also sind nach der Definition der statistischen Unabhängigkeit auch  $p$  und  $\neg q$  voneinander unabhängig. *q.e.d.*

Dementsprechend gilt: Wenn  $p$  statistisch unabhängig von  $q$  ist, dann ist nicht nur  $P(p|q) = P(p)$  sondern auch  $P(p|\neg q) = P(p)$ . Kurz, wenn  $p$  unabhängig von  $q$  ist, dann ändert sich die Wahrscheinlichkeit von  $p$  nicht durch irgendwelche Informationen hinsichtlich der Frage, ob  $q$  eingetreten ist oder nicht. (Aber genauso würden wir es von unabhängigen Ereignissen ja auch erwarten, oder?)

Bei mehr als zwei Ereignissen legt man wie bei der Unvereinbarkeit üblicherweise die *paarweise* Unabhängigkeit zu Grunde. Ähnlich wie bei paarweise *unvereinbaren* Ereignissen die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eins davon eintritt (oder-Verknüpfung!), der *Summe* der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse entspricht, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Ereignisse einer Menge von paarweise *unabhängigen* Ereignissen eintreten, gleich dem *Produkt* der Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse.

Nicht-Monotonie bedingter W'keiten

Der Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten ist nicht immer vollkommen intuitiv. Einige Dinge sollte man im Auge behalten: Durch das Hinzufügen von Bedingungen kann die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses größer oder auch kleiner werden oder auch gleich bleiben. (Es ist also nicht wahr, dass irgendein Grundsatz der Art: „Je mehr Bedingungen, desto unwahrscheinlicher ein Ereignis“ gelten würde.) Beispiel: Angenommen, auf Grund historischer Erfahrungswerte weiß man, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Aktienkurse eines großen Gartenbauunternehmens im Frühjahr mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit  $w$  steigen. Dann wird die Wahrscheinlichkeit, dass sie steigen, wenn das Gartenbauunternehmen im ersten Quartal Gewinne ausweisen konnte, sicher größer sein als  $w$ , während sie unter der Bedingung, dass es Verluste melden musste, wahrscheinlich kleiner sein wird.

Unterschied von bedingter W'keit und Implikation

Schließlich ist noch auf eine Verwechslungsmöglichkeit aufmerksam zu machen. Die Wahrscheinlichkeit, dass „ $q$  unter der Bedingung, dass  $p$ “ eintritt (also  $P(q|p)$ ) ist nicht zu verwechseln mit der Wahrscheinlichkeit von „ $q$  wenn  $p$ “ ( $P(p \rightarrow q)$ ). Ein Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit aus einem Stapel von Karten eine Karte mit Herz zu ziehen ( $q$ ) beträgt  $1/4$ . Wenn man aber vorher alle schwarzen Karten aus dem Stapel entfernt, dann ist die Bedingung gegeben, dass die gezogene Karte eine rote Karte ist ( $p$ ), und die Wahrscheinlichkeit, dass die Karte unter dieser Bedingung Herz ist, beträgt  $P(q|p) = 1/2$ . Andererseits aber beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass es wahr ist, dass „wenn eine rote Karte gezogen wird, dann ist es eine Herz-Karte“



$P(p \rightarrow q) = 3/4$ , denn die Aussage ist auch dann wahr, wenn überhaupt keine rote Karte gezogen wird, was bereits in der Hälfte aller Fälle gilt. Die Bedingungsangabe  $q|p$  ist also nicht zu verwechseln mit der Implikationsangabe  $p \rightarrow q$ . Der Unterschied ist der zwischen der bedingten Behauptung des Folglieds einer Implikation und der Behauptung der Gültigkeit einer Implikationsbeziehung selbst, ein subtiler aber wichtiger Unterschied!

### 3.1.3 Der Bayes'sche Lehrsatz

Aus dem Gesetz für die Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten

$$P(p \wedge q) = P(p) \cdot P(q|p) = P(q) \cdot P(p|q)$$

lässt sich durch Division von  $P(p)$  bzw.  $P(q)$  die *Bayes'sche Regel* ableiten: Bayes'sche Regel

$$P(p|q) = \frac{P(q|p) \cdot P(p)}{P(q)} \quad \text{wenn} \quad P(q) > 0$$

Um den eigentlichen Bayes'schen Lehrsatz abzuleiten, ist es notwendig, den Ausdruck  $P(q)$  im Nenner durch einen Ausdruck zu ersetzen, der die absolute Wahrscheinlichkeit von  $q$  nicht mehr enthält.<sup>4</sup> Dazu erinnern wir uns der aus der Logik (bzw. der Mengentheorie) bekannten Zerlegung von  $q = (q \wedge p) \vee (q \wedge \neg p)$ . Da  $q \wedge p$  und  $q \wedge \neg p$  einander ausschließen gilt:

$$P(q) = P(q \wedge p) + P(q \wedge \neg p)$$

Mit Hilfe des Multiplikationsgesetzes ergibt sich daraus:

$$P(q) = P(q|p) \cdot P(p) + P(q|\neg p) \cdot P(\neg p)$$

Durch Einsetzen in die oben angegebene Regel ergibt sich damit der berühmte *Bayes'sche Lehrsatz*: Bayes'sches Theorem

$$P(p|q) = \frac{P(q|p) \cdot P(p)}{P(q|p)P(p) + P(q|\neg p)P(\neg p)}$$

Wie kann man sich diese Formel am besten merken und wozu ist sie überhaupt gut? Merken kann man sich die Formel recht leicht, wenn man sich klar macht, dass sie die folgende Struktur hat:

$$P(p|q) = \frac{a}{a + b}$$

---

<sup>4</sup>Man kann an dieser Stelle durchaus die Frage stellen, warum man das tun sollte, wenn doch dadurch, wie gleich zu sehen ist, die Formel nur sehr viel komplizierter ist. Aber wie das eingangs zu dieser Vorlesung angeführte Beispiel vielleicht verdeutlicht hat – wir werden gleich darauf zurück kommen – gibt es viele Situationen, in denen wir die unbedingten Wahrscheinlichkeiten irgendeines Vorgangs nicht kennen, wohl aber die bedingten Wahrscheinlichkeiten.

wobei

$$a := P(q|p)P(p)$$

und

$$b := P(q|\neg p)P(\neg p)$$

d.h., salopp ausgedrückt,  $b$  dasselbe ist wie  $a$  nur mit  $\neg p$  statt  $p$ . Man kann sich die Bedeutung dieser Formel mit Hilfe folgender, in vielen Zusammenhängen nützlichen Interpretation merken: Was uns die Formel auf der linken Seite als Ergebnis liefert ist die Wahrscheinlichkeit für die Gültigkeit einer Annahme  $p$  unter der Bedingung, dass irgendeine Probe bzw. ein Test  $q$  erfolgreich durchgeführt worden ist. Auf der rechten Seite kommen nur drei verschiedene Terme vor. Einige davon allerdings mehrfach, nämlich:

1. Die *Basisrate*  $P(p)$ , d.i. die Wahrscheinlichkeit, unter der die Annahme  $p$  normalerweise stimmt, sowie die inverse Basisrate  $P(\neg p) = 1 - P(p)$
2. Die *positiv-positiv Rate*  $P(q|p)$ , d.i. die Wahrscheinlichkeit, dass die Probe  $q$  positiv ausfällt, wenn  $p$  gegeben ist.
3. Die *positiv-negativ Rate*  $P(q|\neg p)$ , d.i. die Wahrscheinlichkeit, dass die Probe  $q$  positiv aus fällt obwohl  $p$  nicht gegeben ist.

Die letzten beiden Wahrscheinlichkeiten beschreiben Fehlerwahrscheinlichkeiten des Testverfahrens  $q$ , und zwar für unterschiedliche Arten von Fehlern! Die *negativ-positiv* und *negativ-negativ* Raten sind dagegen die Inversen der entsprechenden positiv-\* Raten und berechnen damit nach:  $P(\neg q|p) = 1 - P(q|p)$  bzw.  $P(\neg q|\neg p) = 1 - P(q|\neg p)$ . Mit der Bayes'schen Formel berechnet man also die Wahrscheinlichkeit, dass  $p$  zutrifft, wenn ein Testverfahren  $q$  positiv ausfällt. Die Bayes'sche Formel erlaubt uns zu berücksichtigen, dass Testverfahren meistens nicht 100%-ig perfekt sind. Die Unvollkommenheiten des Testverfahrens werden dabei durch die positiv-positiv und die positiv-negativ Raten charakterisiert. Die Wahrscheinlichkeit von  $p$ , wenn der Test positiv ausgefallen ist, berechnet sich, wenn man die Formel in Worte fasst nach: Basisrate mal positiv-positiv Rate *geteilt durch* Basisrate mal positiv-positiv Rate plus inverse Basisrate mal positiv-negativ Rate.

Bayes in  
Worten

### Ein „Anwendungsbeispiel“: Bayes in der medizinischen Diagnostik

Mit diesem Wissen können wir nun auch die Aufgabe zu Beginn der Vorlesung lösen:

Ca. 3% aller 70-jährigen haben Alzheimer. Auch wenn Alzheimer bisher nicht geheilt werden kann, ist die Früherkennung

eine wichtige Voraussetzung für vorbeugende, den Krankheitsverlauf evtl. mildernde Maßnahmen. Leider lässt sich Alzheimer nur schwer präzise diagnostizieren. (Erst durch Gewebeuntersuchungen am verstorbenen Patienten lässt sich mit Sicherheit feststellen, ob eine Alzheimererkrankung vorlag.) Angenommen einmal, die Forschung hätte einen Gedächtnistest entwickelt, durch den eine vorliegende Alzheimererkrankung mit 95%-iger Sicherheit diagnostizierbar ist, an dem im Durchschnitt aber auch 2% der älteren Menschen scheitern, selbst wenn sie nicht an Alzheimer erkrankt sind.<sup>5</sup>

Angenommen, Sie sind Ärztin oder Arzt und untersuchen einen 70-jährigen Patienten mit Hilfe des Gedächtnistests. Es zeigt sich, dass der Patient nicht mehr in der Lage ist, die Aufgaben des Tests zu lösen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Patient an Alzheimer erkrankt ist?

Bei diesem Beispiel, gilt offenbar:

1. Basisrate  $P(p) = 3\%$  (Anteil der Alzheimerkranken unter den 70-jährigen)
2. positiv-positiv Rate  $P(q|p) = 95\%$  (eine vorliegende Alzheimererkrankung ist mit Hilfe des Tests mit 95%-iger Sicherheit diagnostizierbar)
3. positiv-negativ Rate  $P(q|\neg p) = 2\%$  (in 2% der Fälle löst der Test „Fehlalarm“ aus)

In die Bayes'sche Formel eingesetzt ergibt dies:

$$\frac{0,03 \cdot 0,95}{0,03 \cdot 0,95 + 0,97 \cdot 0,02} = 0,59$$

Mit 59%-iger Wahrscheinlichkeit ist der Patient also an Alzheimer erkrankt. Wie kann das sein, mag man sich fragen, dass der Wert nur 59% beträgt, wenn ein Test, der die Krankheit doch zu 95% diagnostiziert, positiv ausgefallen ist. Der Grund ist, dass die Krankheit unter den 70-jährigen überhaupt nur selten vorkommt und dass damit die *Basisrate* recht niedrig ist.

Einfluss der  
Basisrate

---

<sup>5</sup>Die Zahlen sind für den Zweck der Übungsaufgabe willkürlich gewählt und auch die Testverfahren stellen nur natürlich nur ein erfundenes Beispiel dar. Für realistische Zahlen aus der aktuellen Forschung, siehe <http://brain.oxfordjournals.org/cgi/reprint/131/3/681> (Klöppel, Stonnington, Chu, Draganski, Scallan, Rohrer, Fox, Jr, Ashburner, and Frackowiak, 2008). Ich bin Matthias Brinkmann für den Hinweis auf diesen Artikel sehr dankbar!

Wie nützlich der Bayes'sche Lehrsatz ist, tritt so recht dann zu Tage, wenn man ihn mehrfach hintereinander anwendet. Stellen Sie sich unsere Geschichte folgendermaßen fortgesetzt vor:

Als Arzt oder Ärztin sind Sie nicht damit zufrieden, dass Sie die Alzheimererkrankung des Patienten bisher nur mit 59%-iger Wahrscheinlichkeit diagnostizieren konnten. Also wenden Sie noch einen zweiten Test – diesmal einen Test mit Rechenaufgaben an – um ihre Diagnose ggf. zu erhärten. Der zweite Test ist etwas weniger zuverlässig als der erste, indem eine vorliegende Krankheit nur in 90% aller Fälle richtig erkannt wird, aber auch in 10% der Fälle Fehlalarm gegeben wird, obwohl gar keine Erkrankung vorliegt.

Angenommen, Ihr Patient scheitert ebenfalls an den Rechenaufgaben dieses zweiten Tests. Mit welcher Wahrscheinlichkeit müssen Sie nun davon ausgehen, dass er tatsächlich an Alzheimer erkrankt ist?

Um die Aufgabe zu lösen, wendet man wiederum den Bayes'schen Lehrsatz an, nur dass man diesmal als Basisrate das Ergebnis des ersten Tests einsetzt. Wir wissen ja schon mit 59%-iger Wahrscheinlichkeit, dass der Patient erkrankt ist. Die Rechnung liefert dann ein Ergebnis von:

$$\frac{0,59 \cdot 0,9}{0,59 \cdot 0,9 + 0,41 \cdot 0,1} = 0,93$$

Statistische  
Unabhängig-  
keit bei  
Testserien

Durch die kombinierte Anwendung beider Tests ist die Erkrankung nun also mit ca. 93%-iger Sicherheit festgestellt. Eine wichtige Voraussetzung für die verkettete Anwendung des Bayes'schen Lehrsatzes besteht darin, dass die einzelnen Testverfahren statistisch voneinander unabhängig sind, d.h. wenn die Testperson krank ist, darf die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Test die Krankheit korrekt diagnostiziert (positiv-positiv Rate) nicht davon abhängen, ob auch der erste Test unter dieser Bedingung die Krankheit richtig diagnostiziert hat. Dasselbe gilt selbstverständlich auch für die positiv-negativ Rate. Wäre der zweite Test in unserem Beispiel wiederum ein Gedächnistest gewesen, so hätte man Anlass zu der Annahme, dass die beiden Tests nicht statistisch unabhängig voneinander sind. (Für den Rechentest wollen wir einmal gutgläubig vermuten, dass er statistisch unabhängig vom Gedächnistest ist.)

### Ein weiteres Anwendungsbeispiel: Wieviel Geld sind Informationen wert?

Der Bayes'sche Lehrsatz lässt sich auch einsetzen, wenn es darum geht, den Wert von unsicheren Informationen zu beurteilen. Dazu muss man allerdings zunächst klären, wie hoch man den Wert von Informationen überhaupt zu veranschlagen hat. Resnik führt dazu folgendes gedachte Beispiel an (Resnik, 2000, S. 57):

Jemand steht vor der Entscheidung, € 50.000 in eine Firma zu investieren oder lieber in Sparbriefen anzulegen. Die Investition in die Firma würde im Laufe eines Jahres 5% Zinsen einbringen, die in Sparbriefe 10%. Was die Investition in die Firma dennoch interessant macht ist, dass sie möglicherweise noch im Laufe desselben Jahres an die Börse geht. Dann nämlich würden sich die investierten € 50.000 verdoppeln. Als Entscheidungstabelle dargestellt, sieht die Situation also folgendermaßen aus:

	Börsengang	Kein Börsengang
Investiere	€ 100.000	€ 52.500
Kaufe Sparbriefe	€ 55.000	€ 55.000

Angenommen, die Person, die vor dieser Entscheidung steht, hält sich an das Indifferenzprinzip und geht davon aus, dass eine 50% Chance besteht, dass die Firma an die Börse geht. In diesem Fall hätte die Entscheidung zu investieren einen Erwartungswert von  $€ 100.000 \cdot 0.5 + € 52.500 \cdot 0.5 = € 76.250$  und wäre damit dem Kauf von Sparbriefen vorzuziehen. Nun nehmen wir weiterhin an, es gäbe in der Firma einen Insider, der mit Sicherheit sagen könnte, ob die Firma im Laufe des Jahres an die Börse geht oder nicht, und dieser Insider wäre bereit, seine Information zu verkaufen.<sup>6</sup> Wieviel Geld sollte einem diese Information Wert sein. Das hängt wiederum davon ab, welche subjektive Einschätzung man über die Wahrscheinlichkeit hat, dass die Information dahingehend lautet, dass die Firma an die Börse geht. Nehmen wir an, dass in Ermangelung näheren Wissens wiederum von einer 50% Chance ausgegangen wird. Welchen Erwartungswert erzielt man mit dieser Information? In diesem Fall lautet die Rechnung  $€ 100.000 \cdot 0.5 + € 55.500 \cdot 0.5 = € 77.500$ , weil in dem Fall, dass man erfährt, dass die Firma doch nicht an die Börse geht, Sparbriefe kaufen wird. Die Information sollte einem also höchstens € 1.250 Wert sein.

Um nun die Bayes'sche Formel ins Spiel zu bringen, gehen wir von der etwas realistischeren Annahme aus, dass die Information des Insiders nicht völ-

---

<sup>6</sup>Aus gutem Grund verbieten die Gesetze der meisten Länder übrigens sehr strikt den Gebrauch von Insiderwissen bei Börsengeschäften, wie er in diesem Beispiel angenommen wird.

lig zuverlässig ist. Wir nehmen vielmehr an, dass sie einem internen Bericht entnommen ist, von dem nicht sicher ist, wie zuverlässig er ist. Angenommen aus vergleichbaren Fällen ist bekannt, dass wenn ein Börsengang geplant ist, dies mit einer 90%-igen Wahrscheinlichkeit in dem Bericht korrekt mitgeteilt wird, mit einer 10%-igen Wahrscheinlichkeit aber das Gegenteil behauptet wird. Angenommen weiterhin, wir hätten Grund zu der Annahme, dass wenn kein Börsengang stattfinden wird, dennoch mit einer 50%-igen Wahrscheinlichkeit in dem Bericht behauptet wird, es würde ein Börsengang statt finden. Welche Überlegung muss die Person, die vor der Frage steht, ob es sich lohnt, Geld in die Bestechung eines Informanten zu investieren, nun anstellen? Zunächst müsste sie die Wahrscheinlichkeiten berechnen, mit der die Firma an die Börse geht, falls dies in dem Bericht behauptet wird. Und ebenso müsste die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, falls dies in dem Bericht bestritten wird.

Für beide Rechnungen muss man die Bayes'sche Formel heranziehen. In beiden Fällen ist die Basisrate wiederum die subjektive Wahrscheinlichkeit, die für einen Börsengang spricht, und die wir nach dem Indifferenzprinzip auf 50% festgesetzt haben. Im ersten Fall beträgt die positiv-positiv-Rate 90% und die positiv-negativ-Rate 50%. Wenn  $b$  das Ereignis ist, dass die Firma an die Börse geht und  $j$  das Ereignis, dass im Bericht behauptet wird, dass sie es tut, und  $n$  das Ereignis, dass im Bericht behauptet wird, dass sie es nicht tut, dann ergibt sich folgende Rechnung:

$$P(b|j) = \frac{P(b)P(j|b)}{P(b)P(j|b) + P(\neg b)P(j|\neg b)} = \frac{0,5 \cdot 0,9}{0,5 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,5} = 0,643$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Firma nicht an die Börse geht, wenn im Bericht behauptet wird, dass sie es tut  $P(\neg b|j)$ , ist natürlich genau die inverse Wahrscheinlichkeit, also  $P(\neg b|j) = 1 - P(b|j) = 0,357$ .

Im zweiten Fall, d.h. in dem Fall, dass der Bericht einen Börsengang dementiert, betragen die entsprechenden Raten 10% und 50%. Die Rechnung sieht wie folgt aus:

$$P(b|n) = \frac{P(b)P(n|b)}{P(b)P(n|b) + P(\neg b)P(n|\neg b)} = \frac{0,5 \cdot 0,1}{0,5 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,5} = 0,167$$

Die entsprechende inverse Wahrscheinlichkeit  $P(\neg b|n)$  beträgt 0,833.

Für die Beantwortung der Frage, welchen Wert eine solche nur relativ zuverlässige Information hat, müssen nun die Erwartungswerte berechnet werden, 1) für den Fall, dass die Information dahingehend lautet, dass das Unternehmen an die Börse geht, und 2) für den Fall, dass die Information anders lautet, wobei der durch die eben berechneten Wahrscheinlichkeiten

umschriebene Zuverlässigkeitsgrad der Information zu berücksichtigen ist. Es ergibt sich in dem ersten Fall (Börsengang wird behauptet) ein Erwartungswert von:

$$0,643 \cdot \text{€ } 100.000 + 0,357 \cdot \text{€ } 52.500 = \text{€ } 83.035,71$$

Und für den zweiten Fall:

$$0,167 \cdot \text{€ } 100.000 + 0,833 \cdot \text{€ } 52.500 = \text{€ } 60.416,67$$

Das bedeutet aber, dass egal wie die Information ausfällt, es auf jeden Fall besser wäre, in die Firma zu investieren. Die Information selbst ist also wertlos! Es genügt das Wissen, dass es eine entsprechende Information überhaupt gibt, und mit welchen Wahrscheinlichkeiten sie in dem ein oder anderen Fall (Börsengang oder nicht) zuverlässig ist oder nicht, im Zusammenhang mit der subjektiven Annahme einer gleichen Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses und das Nicht-Eintreten des Ereignisses.

(Nun könnte man noch die Frage anschließen, wie der Fall zu beurteilen wäre, wenn – bei anderen Wahrscheinlichkeiten – im zweiten Fall ein Wert herausgekommen wäre, der niedriger wäre als € 55.000. Dann müsste man, wie zuvor, den Erwartungswert, mit dem man in dem Fall rechnet, dass die Information positiv ausfällt, zu den € 55.000 addieren, die man in dem Fall erhält, dass die Information negativ ausfällt und man Sparbriefe kaufen wird. Beide Summanden müssten mit den subjektiven Wahrscheinlichkeitseinschätzungen dafür, wie die Information ausfällt, gewichtet werden (wofür wir eine gleichverteilte Wahrscheinlichkeit von 50% veranschlagt hatten). Das Ergebnis wäre mit dem Erwartungswert ohne jede Information von € 76.250 zu vergleichen, und entsprechend der Differenz der Wert der Information zu veranschlagen.)

Bei diesem Beispiel ist zu beachten, dass die mit Hilfe des Bayes'schen Lehrsatzes berechneten bedingten Wahrscheinlichkeiten davon abhängen, welche subjektive Wahrscheinlichkeitseinschätzung man bezüglich der in die Bayes'sche Formel eingesetzten Basisrate vornimmt. Es handelt sich um (rationale) subjektive Wahrscheinlichkeitseinschätzungen, nicht um „objektiv berechnete Wahrscheinlichkeiten“.

Damit sind wir wieder bei dem Problem der Interpretation von Wahrscheinlichkeitsaussagen, d.h. bei Frage, ob es sich um Aussagen über Häufigkeiten, subjektive Einschätzungen oder objektive „Propensitäten“ handelt. Mit diesem Problem werden wir uns in der nächsten Woche beschäftigen.

### 3.1.4 Aufgaben

1. Ca. 3% aller 70-jährigen haben Alzheimer. Auch wenn Alzheimer bisher nicht geheilt werden kann, ist die Früherkennung eine wichtige Voraussetzung für vorbeugende, den Krankheitsverlauf evtl. mildernde Maßnahmen. Leider lässt sich Alzheimer nur schwer präzise diagnostizieren. (Erst durch Gewebeuntersuchungen am verstorbenen Patienten lässt sich mit Sicherheit feststellen, ob eine Alzheimererkrankung vorlag.) Angenommen einmal, die Forschung hätte einen Gedächtnistest entwickelt, durch den eine vorliegende Alzheimererkrankung mit 95%-iger Sicherheit diagnostizierbar ist, an dem im Durchschnitt aber auch 2% der älteren Menschen scheitern, selbst wenn sie nicht an Alzheimer erkrankt sind.

Durch einen zweiten Test, der etwas weniger zuverlässig ist als der erste, wird eine Vorliegende Krankheit in 90% aller Fälle richtig erkannt und mit 10% Wahrscheinlichkeit wird Fehlalarm gegeben, obwohl gar keine Erkrankung vorliegt.

*Aufgabe:* Angenommen beide Tests fallen positiv aus. Zeigen Sie durch Rechnung: Es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Tests durchgeführt werden.

2. Angenommen bei der vorhergehenden Aufgabe würde mindestens einer der Tests negativ ausfallen, können Sie dann auch eine präzise Aussage über die Wahrscheinlichkeit einer Erkrankung machen?
3. Zeigen Sie, dass die Bayes'sche Formel für das inverse Ereignis, dass der Patient nicht krank ist, obwohl der Test positiv ausgefallen ist (nicht zu verwechseln mit dem Ereignis, dass er nicht krank ist, wenn der Test negativ ausgefallen ist!) wie wir es erwarten würden gleich 1 minus dem ursprünglichen Ereignis ist, also  $P(\neg p|q) = 1 - P(p|q)$ . Zeigen Sie dies durch eine Rechnung für das gegebene Beispiel.
4. Eine Menge von Ereignissen  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  heisst paarweise unvereinbar, wenn für jedes Paar  $p_i, p_k$  gilt, dass  $p_i$  und  $p_k$  miteinander unvereinbar sind. Dagegen nennt man eine Menge  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  von Ereignissen vollständig unvereinbar, wenn niemals alle Ereignisse aus der Menge eintreten können. Zeigen Sie: Paarweise Unvereinbarkeit ist *stärker* als vollständige Unvereinbarkeit, indem eine Menge paarweise unvereinbarer Ereignisse immer auch vollständig unvereinbar ist, aber nicht umgekehrt.



5. a) Zeigen Sie, aus dem 3. kolmogorowschen Axiom (wenn  $p$  und  $q$  unvereinbar, dann  $P(p \vee q) = P(p) + P(q)$ ) folgt: Für jede endliche Menge von paarweise unvereinbaren Ereignissen  $p_i$  mit  $0 \leq i < n, n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$P\left(\bigvee_{0 \leq i < n} p_i\right) = P(p_1 \vee p_2 \vee \dots) = P(p_1) + P(p_2) + \dots = \sum_{0 \leq i < n} P(p_i)$$

Warum kann man nicht in gleicher Weise das Axiom 3' ( $P(\sum_{i=0}^{\infty} p_i) = \sum_{i=0}^{\infty} P(p_i)$ ) aus Axiom 3 ableiten? (Bemerkung: Wäre eine solche Ableitung möglich, dann müsste man Axiom 3' auch nicht als Axiom einführen.)

6. Leiten Sie eine Formel für  $P(q_1 \vee q_2 \vee q_3)$  analog zum Corollar 5 aus der Vorlesung her.
7. Bonferroni's Ungleichung besagt:

$$P(p \wedge q) \geq P(p) + P(q) - 1$$

Beweisen Sie Bonferroni's Ungleichung.

8. In der Vorlesung wurde für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten und-verknüpfter Ereignisse das Beispiel eines Aktienunternehmens  $U$  angeführt, das eine Gewinnwarnung ausgibt. Dabei war:

- $q$  die Aussage „ $U$  gibt eine Gewinnwarnung aus“
- $p$  die Aussage „Der Aktienkurs von  $U$ “ steigt

Die Wahrscheinlichkeit, dass  $U$  eine Gewinnwarnung ausgibt *und* der Aktienkurs von  $U$  steigt, wurde berechnet nach:

$$P(p \wedge q) = P(q) \cdot P(p|q)$$

Wegen der Kommutativität des und-Operators  $\wedge$  hätte man, rein mathematisch betrachtet, aber auch

$$P(p \wedge q) = p(p) \cdot P(q|p)$$

rechnen dürfen. Wie müsste man die zweite Formel in Worten wiedergeben? Führt dies zu einer sinnvollen Interpretation? Wonach richtet sich, welche der beiden Formeln man verwenden wird?

9. Zeigen Sie: a) Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines von einer Menge von paarweise unvereinbaren Ereignissen eintritt, ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.  
 b) Die Wahrscheinlichkeit, dass alle Ereignisse einer Menge von paarweise unabhängigen Ereignissen eintreten, ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.  
 c) Wenn die Ereignisse nicht paarweise unvereinbar bzw. unabhängig sind, wird die entsprechende Wahrscheinlichkeit dann größer oder kleiner?
10. Sei  $p_1, p_2, \dots, p_n$  eine Menge von Ereignissen, die paarweise unvereinbar sind, von denen aber ein Ereignis auf jeden Fall eintreten muss. Sei  $q$  weiterhin ein Ereignis dessen Wahrscheinlichkeit nicht 0 ist. a) Zeige, dass dann folgende erweiterte Form des Bayes'schen Lehrsatzes gilt:

$$P(p_i|q) = \frac{P(q|p_i)P(p_i)}{\sum_{i=1}^n P(q|p_i)P(p_i)}$$

(*Hinweis:* Der Beweis kann ganz analog zu dem Beweis des Bayes'schen Lehrsatzes aus der Vorlesung geführt werden.)

11. Welche Bedingung muss für  $P(q|p)$  (positiv-positiv Rate) und  $P(q|\neg p)$  gelten, damit:
- (a)  $P(p|q) > P(p)$
  - (b)  $P(p|q) < P(p)$
  - (c)  $P(p|q) = P(p)$

Mit anderen Worten: Unter welcher Bedingung unterstützt ein positiver Testausgang  $q$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $p$  stimmt, und unter welcher Bedingung verringert er sie?

Ansatz: Zeige, unter welcher Bedingung diese Ungleichung gilt (bzw. die umgekehrte Ungleichung bzw. die entsprechende Gleichung):

$$\frac{P(q|p) \cdot P(p)}{P(q|p)P(p) + P(q|\neg p)P(\neg p)} > P(p)$$

Zusatz: Zeige, dass im letzten Fall, d.h. wenn  $P(p|q) = P(p)$ , auch gilt, dass  $p$  und  $q$  statistisch unabhängig sind.

### **schwierigere Aufgaben**

12. Beweisen Sie den Zusammenhang, der in Aufgabe 1 durch eine Beispiel-Rechnung illustriert wurde, mathematisch.
13. Führen Sie den vollständigen mathematischen Beweis für den in Aufgabe 3 behaupteten Zusammenhang.
14. Ergänzung zu Aufgabe 6: Können Sie auch eine entsprechende Vorschrift für  $P(\bigvee_{i=1}^n q_i)$  formulieren?

## 3.2 Wahrscheinlichkeiten II: Interpretationsfragen nicht klausurrelevant!)

*Diese Vorlesung setzt zwar keine besonders tiefgehenden Mathekenntnisse voraus, dürfte für mathematisch Ungeübte aber trotzdem streckenweise schwer zu verstehen sein! Wer sie nicht oder nicht ganz versteht, sollte darüber hinweg lesen. Die folgenden Vorlesungen setzen zwar die Kenntnisse der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung aus der letzten Vorlesung voraus, aber nicht unbedingt das Verständnis der diese Woche besprochenen philosophischen Interpretationen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs.*

In der letzten Vorlesungsstunde haben wir uns mit dem mathematischen Wahrscheinlichkeitskalkül und den grundlegenden Rechentechniken der Wahrscheinlichkeitsrechnung vertraut gemacht. Wie man mit Wahrscheinlichkeiten rechnet wissen wir also nun. Eine ganz andere Frage ist die, was Wahrscheinlichkeiten eigentlich sind. Während die mathematische Theorie der Wahrscheinlichkeiten spätestens seit der Axiomatisierung durch Kolmogorow in ihren Grundlagen feststeht, ist die philosophische Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, wie zu erwarten, ein äußerst umstrittenes Feld. In der letzten Stunde wurde bereits erwähnt, dass es grundsätzlich drei unterschiedliche Interpretationen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs gibt:

1. *Häufigkeitstheorie*: Die Wahrscheinlichkeit bezeichnet die Häufigkeit des Vorkommens eines Merkmals in einer Gesamtheit.
2. *Glaubensgrad* (subjektive Wahrscheinlichkeit): Die Wahrscheinlichkeit bezeichnet den Grad des Glaubens an das Eintreten eines Ereignisses, z.B. wenn man eine Wette abschließt.
3. *Propensitäten* (objektive Wahrscheinlichkeit): Die Wahrscheinlichkeit bezeichnet die „Neigung“ mit der Ereignisse in der äußeren Welt eintreten, z.B. die Neigung, mit der bei starkem Neuschnee in einem bestimmten Gebiet Lawinen ausgelöst werden.

Andere Einteilungen sind wie immer möglich (Schurz beispielsweise unterscheidet lediglich die „statistische (objektive) Wahrscheinlichkeit“ von der „subjektive[n] (epistemischen) Wahrscheinlichkeit“ (Schurz, 2006, S.99)).

Diese unterschiedlichen Interpretationen der Wahrscheinlichkeitstheorie wollen wir in dieser Vorlesungsstunde genauer betrachten. Am wichtigsten sind dabei die subjektiven Wahrscheinlichkeiten, weil sich die Nutzen- und Entscheidungstheorie sehr wesentlich auf subjektive Wahrscheinlichkeiten

### 3.2. WAHRSCHEINLICHKEITEN II: INTERPRETATIONSFRAGEN NICHT KLAUSURRELEVANT

stützt. Wir werden sie daher ausführlich zum Schluss der Vorlesung besprechen. Zunächst soll kurz auf die Häufigkeitstheorie und die objektiven Wahrscheinlichkeiten eingegangen werden.

Bevor wir die unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsbegriffe im Einzelnen untersuchen, kann man wiederum die Frage stellen, was ein gültiger Wahrscheinlichkeitsbegriff ist, d.h. welche Bedingungen ein Wahrscheinlichkeitsbegriff überhaupt erfüllen muss, damit wir ihn als Begriff von Wahrscheinlichkeit anerkennen. Da die mathematischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie einigermaßen feststehen, können wir vereinbaren solche Interpretationen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs als gültig zu erachten, von denen wir zeigen können, dass sie die kolmogorowschen Axiome erfüllen. Im Folgenden werden wir daher bei allen Interpretationen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zeigen, dass für das entsprechende Wahrscheinlichkeitskonzept die kolmogorowschen Axiome gelten.

Man kann natürlich weiterhin die Frage stellen, was passiert, wenn wir eine Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs finden, die uns zwar nach dem Maßstab unseres Sprachgefühls als Ausdruck von „Wahrscheinlichkeit“ erscheint, die aber nicht die kolmogorowschen Axiome erfüllt. In diesem Fall hätten wir die Wahl, sie entweder doch nicht als Wahrscheinlichkeitsbegriff gelten zu lassen, oder so etwas wie „nicht-kolmogorowsche Wahrscheinlichkeiten“ zuzulassen. Aber das eher theoretische Überlegungen, die nur die innere Logik von Definitionen und Begriffsbildungen vor Augen führen sollen und außerdem als Hinweis dienen können, dass die hier besprochenen Wahrscheinlichkeitsbegriffe selbstverständlich nicht für alle Zukunft fest stehen müssen. Für die im Folgenden zu untersuchenden Interpretationen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs lässt sich jeweils zeigen, dass sie die Kolmogorowschen Axiome erfüllen.

#### 3.2.1 Objektive Wahrscheinlichkeit

##### Klassische Wahrscheinlichkeit

Den Begriff der „klassischen“ oder auch „Laplaceschen“ Wahrscheinlichkeit kann man als eine Art Vorläufer der Häufigkeitstheorie betrachten. Der klassischen Wahrscheinlichkeit merkt man die Herkunft der Wahrscheinlichkeitstheorie aus dem Glücksspiel am deutlichsten an, denn sie definiert die Wahrscheinlichkeit als:

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Wobei unter „günstigen“ Fällen diejenigen Fälle aus einer nicht-leeren Grundgesamtheit von *gleichartigen* möglichen Fällen zu verstehen sind, die – aus

welchem Grund auch immer – von Interesse sind. Typische Fälle sind z.B. die Wahrscheinlichkeit aus einem Stapel von 52 Spielkarten (mögliche Fälle) ein As zu ziehen (günstige Fälle), oder im Roulette unter allen möglichen Zahlen (einschließlich der Null 37 mögliche Fälle) eine gerade Zahl zu bekommen (18 günstige Fälle). Zu den wesentlichen Eigenschaften der klassischen Wahrscheinlichkeit gehört, dass sie ähnlich wie die etwas weiter unten besprochenen Propensitäten eine Wahrscheinlichkeit für den *Einzelfall* beschreibt. Auch wenn der Begriff der Wahrscheinlichkeit auf eine Gesamtheit von mehreren möglichen Fällen bezogen ist, ist es keineswegs erforderlich, dass der Vorgang, um den es geht (also z.B. das Ziehen einer Karte), mehrfach wiederholt wird oder wiederholbar ist, damit der klassische Begriff der Wahrscheinlichkeit Sinn hat. Denn auch, wenn man nur ein einziges Mal Roulette spielt, hat es Sinn zu sagen, dass es 37 mögliche und, wenn man z.B. auf Zahl setzt, einen günstigen Fall gibt.

Die möglichen Fälle, aus denen sich die Grundgesamtheit zusammensetzt, müssen sich wechselseitig ausschließen, wobei aber sicher ist, dass irgendeiner der Fälle eintritt, und sie müssen in einem gewissen Sinne „gleichartig“ sein. Diese „Gleichartigkeit“ lässt sich zwar im Einzelfall näher beschreiben (etwa bei einem Würfel die gleichmäßige Form und Masseverteilung), aber nicht leicht allgemein charakterisieren, denn die naheliegende Charakterisierung, dass die Fälle der Grundgesamtheit gleichartig sind, wenn sie alle gleichwahrscheinlich sind, fällt aus, weil sonst die Definition der (klassischen) Wahrscheinlichkeit zirkulär werden würde.

Ereignisse kann man in der klassischen Wahrscheinlichkeit in naheliegender Weise als Mengen möglicher Fälle und damit Teilmengen der Grundgesamtheit auffassen. Das Ereignis, aus einem Kartenspiel ein As zu ziehen umfasst beispielsweise die vier möglichen Fälle: Kreuz-As, Pik-As, Herz-As, Karo-As. (Daher bietet sich für die klassische Wahrscheinlichkeit auch in besonderer Weise die mengentheoretische Darstellung der mathematischen Wahrscheinlichkeit an, aber man kann ebenso gut – der aussagenbasierten Darstellung in der letzten Vorlesung folgend – davon sprechen, dass das Ereignis, dass ein As gezogen wird, eingetreten, wenn die Aussage, „es wurde ein As gezogen“, wahr ist. Aussagen über Ereignisse kann man dabei immer mittels und-Verknüpfung aus Aussagen über Fälle der Grundgesamtheit zusammensetzen.)

Eine weitere Frage wäre die, ob man die klassische Definition eher als logisch-theoretische oder als empirische Definition auffassen will. Grundsätzlich ist die Definition eher logisch-theoretischer Natur und nur in dem weitläufigen Sinn empirisch als die Begriffe „günstige Fälle“, „mögliche Fälle“ und „Anzahl“ in einer unbestimmt großen (und nicht einmal zwangsläufig nicht-leeren) Menge von empirischen Anwendungskontexten einen konkreten Sinn

### 3.2. WAHRSCHEINLICHKEITEN II: INTERPRETATIONSFRAGEN NICHT KLAUSURRELEVANT

haben. Bezieht man diesen Wahrscheinlichkeitsbegriff auf einen bestimmten Anwendungskontext, so geht man davon aus, dass die Eigenschaften der Gleichartigkeit und der wechselseitigen Ausschließlichkeit in diesem Kontext gegeben sind, was sich aber immer auch als empirisch falsch herausstellen kann.

Zu zeigen ist nun, dass die so definierte Wahrscheinlichkeit die kolmogorowschen Axiome erfüllt. Wir gehen dazu die Axiom einzeln durch:

1. *Axiom* ( $0 \leq P(p)$ ): Da die Anzahlen von günstigen oder möglichen Fällen niemals kleiner 0 sind, ist diese Bedingung offensichtlich gegeben
2. *Axiom* ( $P(p) = 1$  wenn  $p$  sicher ist): Da ein Ereignis genau dann sicher ist, wenn es alle möglichen Fälle der Grundgesamtheit enthält, und schon aufgrund der Definition keine Fälle enthalten kann, die nicht in der Grundgesamtheit enthalten sind, ergibt der definierende Quotient der klassischen Wahrscheinlichkeit für das<sup>7</sup> sichere Ereignis einen Wert von 1.
3. *Axiom* ( $P(p \vee q) = P(p) + P(q)$  wenn  $p$  und  $q$  sich ausschließen): Zwei Ereignisse schließen sich dann aus, wenn jeder mögliche Fall (der Grundgesamtheit), durch den das eine Ereignis eintritt, kein Fall ist, in dem das andere Ereignis eintritt. (Fassen wir Ereignisse als Mengen von möglichen Fällen auf, dann kann man auch sagen: Zwei Ereignisse schließen sich aus, wenn ihre Schnittmenge leer ist.) Dann tritt dasjenige Ereignis, das eintritt, wenn das eine Ereignis oder das andere Ereignis eintritt ( $p \vee q$ ), aber in genauso vielen Fällen ein wie beide Ereignisse zusammen.

Die kolmogorowschen Axiome werden also durch den Begriff der klassischen Wahrscheinlichkeit erfüllt. Aber wie verhält es sich mit der bedingten Wahrscheinlichkeit? Da es für die bedingte Wahrscheinlichkeit eine mathematische Definition gibt ( $P(p|q) := P(p \wedge q)/P(q)$ ), könnten wir uns eigentlich dabei beruhigen. Allerdings bliebe die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit sehr unbefriedigend, wenn man nicht auch die bedingte Wahrscheinlichkeit in Bezug mögliche und günstige Fälle (also in Bezug auf das „Modell“ der klassischen Wahrscheinlichkeit) definieren würde. Tut man das aber, dann muss man zeigen, dass diese Definition mit dem mathematischen Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit übereinstimmt.

Für die klassische Wahrscheinlichkeit lässt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit in naheliegender Weise folgendermaßen definieren: Die bedingte

---

<sup>7</sup>Da „jedes“ sichere Ereignis alle Fälle der Grundgesamtheit enthalten muss, gibt es nur noch ein sicheres Ereignis.

Wahrscheinlichkeit  $P(p|q)$  ist die Anzahl der Fälle, in denen sowohl das Ereignis  $p$  als auch das Ereignis  $q$  eintritt, geteilt durch die Anzahl der Fälle, in denen nur  $q$  eintritt. Wenn  $q$  unmöglich ist, dann setzen wir die bedingte Wahrscheinlichkeit auf 0 fest. Für  $P(q) = 0$  entspricht die Definition dann bereits unmittelbar der Standarddefinition von  $P(p|q) := 0 \Leftarrow P(q) = 0$ . Andernfalls gilt:

$$\begin{aligned} P(p|q) &= \frac{\text{Anzahl } p \wedge q\text{-Fälle}}{\text{Anzahl } q\text{-Fälle}} \\ &= \frac{\text{Anzahl } p \wedge q\text{-Fälle}}{\text{Anzahl möglicher Fälle}} \quad / \quad \frac{\text{Anzahl } q\text{-Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}} \\ &= \frac{P(p \wedge q)}{P(q)} \end{aligned}$$

Die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit in Bezug auf mögliche und günstige Fälle entspricht also genau der mathematischen Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit.

Die Laplace'sche Wahrscheinlichkeit ist sicherlich die verständlichste und naheliegendste Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Sie wirft aber auch eine Reihe von mehr oder minder gravierenden Problemen auf:

1. Sie lässt sich nur dort anwenden, wo wir die Anzahl der möglichen Fälle feststellen können, d.h. wo eine endliche und wohlumrissene Grundgesamtheit vorliegt. Die Wahrscheinlichkeit etwa, mit der es zu einem Börsencrash kommt, ließe sich mit der Laplaceschen Wahrscheinlichkeit nicht mehr ohne Weiteres ausdrücken.
2. Die Fälle zu bestimmen, aus denen sich die Grundgesamtheit zusammensetzt, kann unter Umständen ein nicht-triviales Problem darstellen. Will man z.B. die Frage beantworten, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei zwei Münzwürfen zweimal Kopf zu erhalten, dann besteht die Grundgesamtheit aus den *vier* möglichen Kombinationen: Kopf-Kopf, Kopf-Zahl, Zahl-Kopf, Zahl-Zahl. Aber warum besteht sie nicht aus den *drei* möglichen Kombinationen: Beidemale Kopf, Beidemale Zahl, Einmal Kopf und einmal Zahl? Die Frage ist gar nicht so leicht zu beantworten, vor allem wenn man sich Situationen vorstellt, in denen die richtige Lösung nicht so offensichtlich ist.
3. Schließlich stellt sich das Problem, was zu tun ist, wenn die Fälle der Grundgesamtheit nicht gleichartig sind. Wenn wir uns beispielsweise einen Holzwürfel vorstellen, in dessen Innerem ein Stück Blei direkt



### 3.2. WAHRSCHEINLICHKEITEN II: INTERPRETATIONSFRAGEN NICHT KLAUSURRELEVANT

unter der Eins angebracht ist, wie sollten wir die nun nicht mehr gleichverteilten Fälle von Würfeln von eins bis sechs auf eine Grundgesamtheit gleichverteilter Fälle herunterbrechen? Was wären die Fälle der Grundgesamtheit, wenn es nicht mehr die möglichen Würfelergebnisse sein können?

Eine Antwort auf die letzte Frage gibt insbesondere die Häufigkeitstheorie der Wahrscheinlichkeit, der wir uns nun zuwenden.

#### **Häufigkeitstheorie**

Das Problem, das die Fälle der Grundgesamtheit nicht „gleichartig“ sind, und ebenso die Frage, wie man ggf. feststellen kann, ob sie es sind, wird in sehr naheliegender Weise durch die Häufigkeitstheorie der Wahrscheinlichkeit beantwortet. Nach der Häufigkeitstheorie besteht die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses darin, wie häufig es innerhalb einer Menge oder Folge von möglichen Ereignissen vorkommt. Präziser müsste man von der Häufigkeit eines Ereignistyps in einer Menge von Möglichkeiten, dem „Individuenbereich“ sprechen, denn bei der Häufigkeitstheorie bezieht sich die Wahrscheinlichkeit nicht mehr auf ein einzelnes Ereignis sondern auf mehrfach vorkommende bzw. wiederkehrende Ereignisse derselben Art. Nach der Häufigkeitstheorie würde man unter der Wahrscheinlichkeit, mit der es zu einem Flugzeugunglück auf der Strecke von Frankfurt nach New York kommt, die Häufigkeit verstehen, mit der dieses Ereignis bezogen auf alle Flüge von Frankfurt nach New York eintritt. Die bedingte Wahrscheinlichkeit wäre dann die beispielsweise Häufigkeit, mit der Flugzeuge auf dem Flug von Frankfurt nach New York bei schlechtem Wetter abstürzen, wenn man in diesem Beispiel das schlechte Wetter einmal als Bedingung nimmt.

Entscheidend im Unterschied zur klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie ist, dass die Häufigkeitstheorie keine Grundgesamtheit gleichartiger im Sinne von „gleichmöglicher“ Fälle mehr voraussetzt, und daher auch auf einen wesentlichen breiteren Bereich von Phänomenen passt. Eine zweite wichtige Eigenschaft der Häufigkeitstheorie besteht darin, dass sie sich auf Ereignisfolgen unbestimmter Größe beziehen lässt. Wenn wir die Wahrscheinlichkeit von „Kopf- oder Zahl“ bei einem Münzerwurf im Sinne der Häufigkeitstheorie verstehen, dann ist die Menge der Ereignisse, auf die sich die Häufigkeit bezieht, d.h. die Menge der Münzwürfe überhaupt, unbestimmt groß. Wenn von Häufigkeit die Rede ist, so muss die relative Häufigkeit von der absoluten Häufigkeit unterschieden werden. Unter der absoluten Häufigkeit ist zu verstehen, wie oft ein bestimmtes Merkmal (z.B. Kopf beim Münzwurf) in einer Folge von Ereignissen (Münzwürfe überhaupt) auftritt. Die relative

Häufigkeit ist dann durch den Quotienten definiert:

$$\text{relative Häufigkeit} := \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Größe der Ereignisfolge}}$$

Eine Schwierigkeit entsteht nun, wenn die Ereignisfolge unbestimmt groß ist: Wie soll man die relative Häufigkeit in diesem Fall bestimmen. Greift man nur eine bestimmte Teilfolge heraus, dann besteht die Gefahr, dass die relative Häufigkeit des Merkmals in dieser Teilfolge eine andere ist als die einer größeren Folge. Die relative Häufigkeit bezogen auf die Gesamtfolge lässt sich wegen der Unbestimmtheit ihrer Größe ja nicht feststellen. (Es ist praktisch unmöglich alle Münzwürfe, die jemals auf der Welt durchgeführt werden, zu registrieren.) Häufigkeitstheoretiker antworten darauf mit einer empirischen Hypothese, dem

*Gesetz der Stabilität der statistischen Häufigkeiten:* Bei Massenphänomenen (Münzwürfe, Würfel u.a.) stabilisiert sich die relative Häufigkeit bestimmter Merkmale mit zunehmender Zahl der Beobachtungen. (Gillies, 2000, S. 92)

Wenn man etwas vorsichtiger ist, wird man das Gesetz nicht auf alle Massenphänomene schlechthin, sondern nur auf jeweils bestimmte Massenphänomene beziehen und damit die Möglichkeit zulassen, dass es Massenphänomene gibt, die nicht statistisch erfassbar sind. Akzeptiert man das Gesetz der Stabilität der statistischen Häufigkeiten aber erst einmal, dann lässt sich die Wahrscheinlichkeit im Sinne der Häufigkeitstheorie im Prinzip sehr einfach messen, indem man empirische Beobachtungen oder Experimente anstellt. Ab welcher Zahl von Beobachtungen die relative Häufigkeit bei einem Massenphänomen hinreichend stabil ist, damit wir zuverlässige statistische Aussagen darüber treffen können, ist keine Frage mehr, die die philosophischen Grundlagen der Häufigkeitstheorie betrifft, sondern die der Kunstlehre der Statistik überlassen bleibt. Für die Rechtfertigung der Häufigkeitstheorie muss diese Frage nicht entschieden werden.

Das empirische Gesetz der Stabilität der statistischen Häufigkeiten motiviert eine bestimmte Art der Axiomatisierung speziell des *häufigkeitstheoretischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs*. Da der häufigkeitstheoretische Wahrscheinlichkeitsbegriff sich auf das Auftreten von Merkmalen in einer Ereignisfolge bezieht, wird dafür zunächst der Begriff eines *Kollektivs* definiert. Unter einem Kollektiv  $\mathcal{C} = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  versteht man unendliche Folgen von Merkmalen  $\omega_n$  eines Merkmalsraumes  $\Omega$ . Dass man in der mathematischen Darstellung der *unbestimmt großen* empirischen Ereignisfolgen *unendliche* Merkmalsfolgen verwendet, kann dabei – vergleichbar den „ausdehnungslosen Punkten“ in der Geometrie – als eine der Idealisierungen gerechtfertigt

### 3.2. WAHRSCHEINLICHKEITEN II: INTERPRETATIONSFRAGEN NICHT KLAUSURRELEVANT

werden, deren man sich bei der mathematischen Repräsentation empirischer Sachverhalte stets bedient. Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Merkmals wird dabei immer auf ein solches Kollektiv bezogen. Die Häufigkeitstheorie definiert die Wahrscheinlichkeiten also von vornherein als bedingte Wahrscheinlichkeiten. Von diesen „Kollektive“ genannten Merkmalsfolgen wird nun verlangt, dass sie die folgenden beiden Axiome erfüllen (Vgl. (Gillies, 2000, S.97, 105)):

1. Axiom (*Axiom der Konvergenz*): Sei  $A$  eine beliebige Menge von Merkmalen des Kollektivs  $\mathcal{C}$  und  $m(A)$  die Häufigkeit, mit der Merkmale dieser Menge unter den ersten  $n$  Folgegliedern des Kollektivs auftreten, dann *existiert* der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} m(A)/n$  und es gilt per Definition  $P(A|\mathcal{C}) := \lim_{n \rightarrow \infty} m(A)/n$
2. Axiom (*Axiom der Zufälligkeit*): Für jedes *zufällig* ausgewählte Teilkollektiv  $\mathcal{C}'$  von  $\mathcal{C}$  gilt:  $P(A|\mathcal{C}') = P(A|\mathcal{C})$ , d.h. der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Teilkollektivs  $\mathcal{C}'$  muss derselbe sein wie der Grenzwert des relativen Häufigkeit des Kollektivs  $\mathcal{C}$  selbst.

Bezüglich dieser Axiome stellen sich nun drei Fragen: 1. Ist die Axiomatisierung sinnvoll, d.h. was sagen die beiden Axiome eigentlich aus und warum werden beide gebraucht? 2. Ist mit diesen Axiomen *eine* Wahrscheinlichkeit im Kolmogorowschen Sinne definiert? 3. Gibt es Einwände gegen die Axiome und insbesondere, gibt es Wahrscheinlichkeiten, die von diesen Axiomen nicht erfasst werden?

**1. Erläuterung.** Zunächst zur Erläuterung dieser Axiome. Das erste Axiom verlangt, dass in jedem Kollektiv der Grenzwert der relativen Häufigkeit jeden darin vorkommenden Merkmals existiert. Kann man dergleichen überhaupt per Axiom fordern? Was ist mit Folgen (weiter unten werden wir eine kennen lernen), bei denen dies nicht der Fall ist? Die Antwort ist: Da die Axiome *implizite Definitionen* der darin vorkommenden Begriffe sind, sind Merkmalsfolgen, bei denen für mindestens ein Merkmal der Grenzwert der relativen Häufigkeit nicht definiert ist, keine Kollektive im Sinne der Häufigkeitstheorie. Für solche Folgen sind dementsprechend auch keine Wahrscheinlichkeiten im Sinne der Häufigkeitstheorie definiert.

Das zweite Axiom fordert, dass auch jede *zufällig*(!) ausgewählte Teilfolge für alle Merkmale denselben Grenzwert der relativen Häufigkeit aufweist. Das zweite Axiom ist deshalb notwendig, weil nur so sichergestellt ist, dass sich Stichproben aus dem Kollektiv im Sinne des *Gesetzes der Stabilität der statistischen Häufigkeiten* auf lange Sicht auf denselben Grenzwert stabilisieren. Natürlich kann ein Axiom niemals sicherstellen, dass das empirisch

tatsächlich der Fall ist, aber wenn man schon annimmt, dass das *Gesetzes der Stabilität der statistischen Häufigkeiten* empirisch gilt, dann muss man es im Rahmen einer axiomatischen Theorie, die empirisch angewendet werden soll, in irgendeiner Form erfassen, entweder als Axiom oder als abgeleitetes Theorem.

Die Schwierigkeit von Axiom 2, die den Erfindern der Häufigkeitstheorie über viele Jahre Kopfzerbrechen bereitet hat (Gillies, 2000, S. 105ff.), liegt in dem Ausdruck *zufällig* verborgen. Man kann sich leicht überlegen, dass, wenn die Auswahl der Teilfolge nicht zufällig getroffen wird, die Wahrscheinlichkeit im Sinne der Häufigkeitstheorie nur noch für triviale Kollektionen definiert wäre, in denen die Wahrscheinlichkeit jedes Merkmals entweder 0 oder 1 ist. Denn wenn die nach Axiom 1 definierte Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Merkmals  $A$  (oder präziser einer Menge von Merkmalen  $A$ ) in einem Kollektiv  $\mathcal{C}$  nicht 1 ist, dann müsste man nur diejenige Teilfolge  $\mathcal{C}'$  auswählen, die aus genau den Folgegliedern des Kollektivs besteht, bei denen das Merkmal auftritt ( $\omega_i \in A$ ). In dem Teilkollektiv  $\mathcal{C}'$  beträgt der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Merkmals dann 1.

Die mathematisch genaue Definition von *Zufälligkeit* in diesem Zusammenhang erfordert etwas mehr Hintergrundwissen in der Mathematik und Informatik als an dieser Stelle vermittelt werden kann. In Kürze nur soviel: Zufällig im Sinne des Axioms ist eine Auswahl, wenn sie durch eine *rekursive Funktion* im Sinne von Alonso Church beschrieben werden kann. Eine *rekursive Funktion* ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen auf die natürlichen Zahlen, deren Funktionswerte in *endlich vielen Rechenschritten* ermittelt werden können. Es lässt sich zeigen, dass dann noch überabzählbar und damit sicherlich hinreichend viele nicht-triviale Kollektive beide Axiome erfüllen. Näheres dazu bei Donald Gillies (Gillies, 2000, S. 108).

**2. Nachweis der Erfüllung der Kolmogorowschen Axiome.** Dass mit den beiden Axiomen der Häufigkeitstheorie eine Wahrscheinlichkeit im Sinne Kolmogorows definiert ist lässt sich leicht nachweisen:

1. Das erste Kolmogorowsche Axiom  $0 \leq P(p)$  gilt (wenn man unter  $p$  die Aussage versteht, dass ein Merkmal aus der Menge von Merkmalen  $A$  auftritt) offensichtlich, da sowohl  $m(A) \geq 0$  als auch  $n \geq 0$  und damit auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} m(A)/n \geq 0$ .
2. Das zweite Axiom  $P(\Omega) = 1$  gilt ebenfalls offensichtlich, da jedes Glied der Kollektion  $\omega_i \in \Omega$  und damit  $m(A) = n$ , so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} m(A)/n = 1$

### 3.2. WAHRSCHEINLICHKEITEN II: INTERPRETATIONSFRAGEN NICHT KLAUSURRELEVANT

3. Das dritte Axiom, die Additivität der Wahrscheinlichkeit, die wir bezogen auf die Häufigkeitstheorie leicht umformulieren können als:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad A \cap B = \emptyset$$

ergibt sich, wenn man sich klar macht, dass mit  $A \cap B = \emptyset$  gilt:

$$\frac{m(A)}{n} + \frac{m(B)}{n} = \frac{m(A \cup B)}{n}$$

woraus sich mit dem Axiom der Konvergenz und den bekannten Rechenregeln für Grenzwerte ergibt:

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(A)}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(B)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{m(A)}{n} + \frac{m(B)}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(A \cup B)}{n} \\ &= P(A \cup B) \end{aligned}$$

Etwas aufwendiger ist wieder die Behandlung der bedingten Wahrscheinlichkeiten. Zunächst muss die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(A|B)$  in Bezug auf den Häufigkeitsbegriff der Wahrscheinlichkeit erklärt werden. Da die Häufigkeitstheorie die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Merkmals immer schon bedingt auf ein Kollektiv versteht ( $P(A|\mathcal{C})$ ), stellt sich die Frage, wie die Wahrscheinlichkeit eines Merkmals unter der Bedingung, dass ein anderes Merkmal aufgetreten ist, zu verstehen ist. Dies ist aber leicht möglich: Wir schreiben für  $P(A|B)$  einfach  $P(A|B \& \mathcal{C})$ , wobei unter  $B \& \mathcal{C}$  diejenige Teilfolge von  $\mathcal{C}$  zu verstehen ist, die durch die Auswahl derjenigen Folgeglieder von  $\mathcal{C}$  zustande kommt, bei denen das Merkmal (bzw. die Merkmalsmenge)  $B$  auftritt. (Sollte  $B$  nur endlich oft in  $\mathcal{C}$  auftauchen, also gar keine echte Teilfolge bilden können, dann gilt  $P(B|\mathcal{C}) = 0$  und wir setzen  $P(A|B \& \mathcal{C}) := 0$ . Im folgenden nehmen wir weiterhin  $P(B|\mathcal{C}) = 0$  an.<sup>8</sup>) Nun muss allerdings noch gezeigt werden, dass  $B \& \mathcal{C}$  auch ein Kollektiv ist, d.h. das  $B \& \mathcal{C}$  ebenfalls das Axiome der Konvergenz und das Axiom der Zufälligkeit erfüllt.

Dass  $B \& \mathcal{C}$  ebenfalls ein Kollektiv ist, kann bewiesen werden,<sup>9</sup> indem man zeigt, dass für jedes beliebige Merkmal  $A$  (bzw. jede beliebige Merkmalsmenge  $A$ ) der Grenzwert der relativen Häufigkeit von  $A$  in  $B \& \mathcal{C}$  existiert. Dass ist aber der Fall, denn:

<sup>8</sup>Aus Gründen der Einfachheit wird hier auf die Behandlung dieses Sonderfalls verzichtet. Andernfalls müsste diese Möglichkeit im folgenden Beweis mit Hilfe einer Fallunterscheidung berücksichtigt werden!

<sup>9</sup>Da  $B \& \mathcal{C}$  nicht unbedingt eine zufällige Auswahl aus  $\mathcal{C}$  darstellt, kann man sich den Beweis *nicht* durch Anwendung des Axioms der Zufälligkeit ersparen!

1. Für jedes beliebige  $n$  gilt, dass  $B$  in  $\mathcal{C}$  mit einer bestimmten Häufigkeit, nennen wir sie  $n(B)$ , vorkommt.
2. Da der Fall  $P(B|\mathcal{C}) = 0$  bereits behandelt und somit ausgeschlossen wurde, gilt weiterhin, dass mit  $n \rightarrow \infty$  auch  $n(B) \rightarrow \infty$ .
3. Sei die absolute Häufigkeit, mit der  $A$  unter den ersten  $n(B)$  Gliedern der Folge  $B\&\mathcal{C}$  auftritt, mit  $m(A)$  bezeichnet. Und sei weiterhin die Häufigkeit der Fälle, in denen  $A$  und gleichzeitig  $B$  unter den ersten  $n$  Folgegliedern von  $\mathcal{C}$  auftreten, mit  $n(A\&B)$  bezeichnet. Dann gilt offensichtlich:  $m(A) = n(A\&B)$ .
4. Dann lässt sich folgende Rechnung aufstellen:

$$\lim_{n(B) \rightarrow \infty} \frac{m(A)}{n(B)} = \lim_{n(B) \rightarrow \infty} \frac{n(A\&B)}{n(B)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A\&B)/n}{n(B)/n}$$

Sowohl  $A\&B$ <sup>10</sup> als auch  $B$  sind Merkmale, die in dem Kollektiv  $\mathcal{C}$  auftreten können. Nach dem Axiom der Konvergenz ist damit der Grenzwert sowohl für den Zähler als auch für den Nenner definiert. Aufgrund der Voraussetzung, dass  $P(B|\mathcal{C}) \neq 0$  und damit nach der häufigkeitstheoretischen Definition von  $P(B|\mathcal{C})$  auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} m(B)/n \neq 0$  gilt daher, dass der Grenzwert

$$\lim_{n(B) \rightarrow \infty} \frac{m(A)}{n(B)} \quad \text{existiert!}$$

Damit und da der Quotient  $m(A)/n(B) = m(A)/n'$  mit  $n' := n(B)$  nach der Definition von  $m(A)$  auch die relative Häufigkeit von  $A$  in der Folge  $B\&\mathcal{C}$  beschreibt, ist implizit gezeigt, dass  $B\&\mathcal{C}$  ebenfalls eine Kollektion ist und das Axiom der Konvergenz auch für bedingte Wahrscheinlichkeiten erfüllt ist.

Nach der Rechnung oben und der Definition der Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeiten, gilt nun:

$$P(A|B) = \lim_{n(B) \rightarrow \infty} \frac{m(A)}{n(B)} = \frac{P(A\&B)}{P(B)}$$

---

<sup>10</sup> Anmerkung zur Nomenklatur: In streng mengentheoretischer Schreibweise müsste man  $A \cap B$  schreiben. Bezieht man die Wahrscheinlichkeiten, wie in der letzten Vorlesung auf die Richtigkeit von Aussagen, dann müsste man für die Aussage, dass das Merkmal  $A$  und das Merkmal  $B$  eingetreten sind entsprechend den Gepflogenheiten der formalen Logik  $A \wedge B$  schreiben.

### 3.2. WAHRSCHEINLICHKEITEN II: INTERPRETATIONSFRAGEN NICHT KLAUSURRELEVANT

was genau der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit für Kolmogorowsche Wahrscheinlichkeiten entspricht. (Beweis nach D. Gillies (Gillies, 2000, S. 111/112).)

Zu zeigen bleibt noch, dass bedingte Wahrscheinlichkeiten nach der Häufigkeitstheorie auch das zweite Axiom, das der Zufälligkeit, erfüllen. Es muss also gezeigt werden, dass der Grenzwert der relativen Häufigkeit jedes blieben Merkmals  $A$  in der Folge  $B\&C$  der gleiche ist wie in der zufällig ausgewählten Teilfolge  $(B\&C)'$ . Da wir den Begriff der *zufälligen Auswahl* im Rahmen dieser Vorlesung nicht mathematisch präzise eingeführt haben, kann der Beweis hier nur angedeutet werden:

Sei  $(B\&C)'$  ein zufällig ausgewähltes Teilkollektiv von  $B\&C$ . Dann kann man mit Hilfe dieser Zufallsauswahl eine Zufallsauswahl  $C'$  des Kollektivs  $C$  bilden, die sich bei allen Folgegliedern von  $C$ , die in der Teilfolge  $B\&C$  auftauchen, mit der Auswahl  $(B\&C)'$  deckt. Ist das aber der Fall, dann entspricht die Zufallsauswahl  $(B\&C)'$  der Auswahl  $B\&C'$ . Aus dem ersten Teil des Beweises wissen wir, dass  $B\&C$  und  $B\&C'$  ebenfalls Kollektive sind. Auf Grund des Axioms der Zufälligkeit wissen wir, dass der Grenzwert:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(B)/n$  für  $C$  und für  $C'$  ein- und derselbe ist. Dass heisst aber auch, dass für jedes beliebige  $A$  der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A\&B)/n}{n(B)/n}$$

ein- und derselbe ist, ganz gleich welches der beiden Kollektive  $C$  und  $C'$  man zugrunde legt. Damit ist aber gezeigt, dass die bedingte häufigkeitstheoretische Wahrscheinlichkeit ein- und dieselbe bleibt, unabhängig davon, welches Teilkollektiv man auswählt – ganz so, wie es das Axiom der Zufälligkeit fordert. (Vgl. (Gillies, 2000, S. 112))

Die Häufigkeitstheorie erfüllt also die Axiome Kolmogorows und definiert damit, wie man sagen könnte, mathematisch korrekte Wahrscheinlichkeiten. Wenn es nur darum gegangen wäre, die Kolmogorowschen Axiome zu erfüllen, so hätte das erste Axiom der Häufigkeitstheorie (Konvergenzaxiom) bereits ausgereicht. Das zweite Axiom ist für die Erfüllung der kolmogorowschen Axiome nicht notwendig. Es bildet aus anderen Gründen einen wesentlichen Bestandteil der Häufigkeitstheorie. Das zweite Axiom bildet das *Gesetz der Stabilität der statistischen Häufigkeiten* auf die mathematische Häufigkeitstheorie ab, und stellt daher die für eine anwendungstaugliche Theorie notwendige Beziehung zur Empirie her. Ohne das Axiom der Zufälligkeit würde es Wahrscheinlichkeiten im häufigkeitstheoretischen Sinne geben können, für die man sich nicht auf das *Gesetz der Stabilität der statistischen Häufigkeiten* verlassen kann.

**3. Einwände und Diskussion** Welche Einwände gibt es gegen die Häufigkeitstheorie? Die Häufigkeitstheorie ist wie alle Wahrscheinlichkeitstheorien, die „unterhalb“ der Kolmogorowschen Axiome ansetzen, keineswegs unumstritten. Manche Autoren lehnen sie sogar grundsätzlich ab (Bosch, 1999). Welche Argumente könnte man dafür anführen?

Denjenigen, die sich bereits etwas mit der Statistik auskennen, dürfte vielleicht schon aufgefallen sein, dass das Konvergenzaxiom in einem eigentümlichen Gegensatz zu dem sogenannten „Gesetz der großen Zahlen“ steht. Das Gesetz der großen Zahlen besagt sinngemäß, dass wenn irgendein Merkmal  $A$  eine bestimmte Wahrscheinlichkeit  $r$  hat, dass dann die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit vom Wahrscheinlichkeitswert  $r$  abweicht, gegen 0 geht. Das Konvergenzaxiom fordert aber, dass die relative Häufigkeit gegen  $r$  geht. Widerspricht das nicht dem Gesetz der großen Zahlen, da es nach dem Gesetz der großen Zahlen doch Fälle geben kann, in denen der Häufigkeitsgrenzwert nicht erreicht wird? Die Antwort ist Folgende: Die Häufigkeitstheorie definiert einen engeren Wahrscheinlichkeitsbegriff als das Gesetz der großen Zahlen. Jede Wahrscheinlichkeit im Sinne der Häufigkeitstheorie erfüllt selbstverständlich das Gesetz der großen Zahlen, aber nicht umgekehrt. (Das Gesetz der großen Zahlen könnte im Rahmen der Häufigkeitstheorie sogar überflüssig erscheinen, da mit dem Konvergenzaxiom ja bereits ein „strengeres“ Gesetz existiert.) Anders als das Konvergenzaxiom taugt das Gesetz der großen Zahlen nicht, wie die naive statistische Theorie manchmal annimmt, zur Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, da das Definiendum dann im Definiens auftreten würde, womit die Definition zirkulär wäre (Schurz, 2006, S. 113). Der Einwand verweist aber darauf, dass der Wahrscheinlichkeitsbegriff der Häufigkeitstheorie nicht als erschöpfend angesehen werden kann. Die Häufigkeitstheorie kann aus diesem Grund unnötig restriktiv erscheinen.

Andere Einwände gegen die Häufigkeitstheorie sind eher empirischer Natur, etwa dergestalt, dass es ohnehin keine beliebig großen Folgen völlig gleichartiger Ereignisse gäbe (etwa: „Jeder Würfel nützt sich irgendwann ab! Zwei unterschiedliche Münzen sind niemals ganz gleich!“ etc.) und schon gar keine unendlich großen. Die entscheidende Frage besteht darin, ob man bereit ist, die Axiome der Häufigkeitstheorie als idealisierende Abstraktion eines empirischen Sachverhalts bzw. einer Vielzahl empirischer Sachverhalte (nämlich, dass wir die Wahrscheinlichkeiten statistischer Vorgänge mit zunehmend größeren Stichproben zunehmend zuverlässig messen können) zu akzeptieren. Anlässlich der vielfältigen Einsatzmöglichkeiten statistischer Methoden enthält die Häufigkeitstheorie in empirischer Hinsicht weit weniger starke Zumutungen als die im Folgenden zu besprechende Theorie der subjektiven Wahrscheinlichkeiten.



### Ein Wort zu Propensitäten

Wenn der Wahrscheinlichkeitsbegriff der Häufigkeitstheorie nicht erschöpfend ist, dann ist zumindest Raum für weitere Wahrscheinlichkeitsbegriffe. Eine weitere wichtige Klasse von *objektiven* Wahrscheinlichkeiten wird durch die verschiedenen Propensitätstheorien definiert. Da die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsbegriffe aber für die Spiel- und Entscheidungstheorie keine zentrale Rolle spielen, und die Propensitätstheorien zudem noch wenig kanonisiert sind, werden sie hier nur erwähnt. Für Interessierte sei auf die Fachliteratur, insbesondere auf die sehr lesbare Darstellung von Donald Gillies (Gillies, 2000) verwiesen. Wir werden uns statt dessen gleich den subjektiven Wahrscheinlichkeiten zuwenden, die die Grundlage der modernen Nutzentheorie bilden.

### 3.2.2 Subjektive Wahrscheinlichkeiten

Die im Zusammenhang mit der Entscheidungs- und Spieltheorie wichtigste Theorie der Wahrscheinlichkeit ist die Theorie der subjektiven Wahrscheinlichkeit, wie sie ursprünglich von Ramsey und De Finetti entwickelt wurde (Resnik, 2000, p. 68ff.). Subjektive Wahrscheinlichkeiten kommen im täglichen Leben u.a. dann vor, wenn wir Wetten abschließen. Daran knüpft die subjektive Wahrscheinlichkeitstheorie an. Natürlich kann die Theorie nicht vorschreiben, wie hoch wir auf etwas wetten sollen, oder mit welcher Wahrscheinlichkeit wir davon ausgehen sollen, dass diese oder jene Fussballmannschaft gewinnt, oder dieses oder jenes Pferd ein Rennen gewinnt etc., denn diese Einschätzungen sind ja gerade subjektiv. Was uns die Theorie subjektiver Wahrscheinlichkeiten aber zeigen kann, das ist, ob unsere Wahrscheinlichkeitseinschätzungen in sich konsistent sind, wenn sie sich auf mehrere, mit einander verbundene Sachverhalte beziehen.

Dazu ein einfaches Beispiel: Jemand behauptet, dass die Chancen, dass beim Bundesligaspiel Nürnberg gegen Bayern München die Chancen für einen Sieg von Nürnberg 90% betragen. Dann muss er, um konsequent zu sein, auch zugleich der Ansicht sein, dass ein Sieg für Bayern München zu 10% wahrscheinlich ist. Was wäre, wenn das nicht der Fall ist? Wenn z.B. jemand der Ansicht ist, dass ein Sieg Nürnbergs zu 90% wahrscheinlich ist, eine Sieg Bayerns aber zugleich zu 50% für wahrscheinlich hält. Dann könnte ein Buchmacher mit diesem mathematisch unkundigen Fussballfan eine sehr vorteilhafte Wette abschließen. Er würde z.B. vorschlagen: „Lass uns auf beides 100 € wetten, d.h. da Du den Sieg von Nürnberg zu 90% für wahrscheinlich hältst, zahlst Du 90 € ein und ich 10 €. Und für die Wette auf Bayern zahlen wir beide 50 € ein. Wer die Wette gewinnt, bekommt in dem einen, wie in dem

anderen Fall die gesamten Einzahlungen.“ Geht der Fussballfan auf dieses Wettverfahren ein, dann hat der Buchmacher in jedem Fall einen Gewinn von 40 € sicher. Denn, wenn Nürnberg gewinnt, hat er in der ersten Wette 10 € verloren und in der zweiten 50 € gewonnen und, wenn Bayern gewinnt, hat er bei der zweiten Wette 50 € verloren aber bei der ersten 90 € gewonnen. Man sagt auch (in der englischen Fachliteratur), er habe ein „*Dutch Book*“ gegen den unachtsamen Wettfreund gemacht.

Vor allem zeigt das Beispiel, dass unsere subjektiven Wahrscheinlichkeitseinschätzungen, sollen sie konsistent sein, nicht vollkommen willkürlich sein dürfen. Sobald wir nämlich der Richtigkeit irgendwelcher Aussagen (oder dem Eintreten irgendwelcher Ereignisse) bestimmte Wahrscheinlichkeiten zuweisen, ergeben sich daraus implizit die Wahrscheinlichkeiten, die wir den logischen Verknüpfungen dieser Aussagen mit *und*, *oder* und *nicht* und den bedingten Aussagen zuweisen müssen, wenn wir vermeiden wollen, das jemand ein „*Dutch Book*“, d.h. eine „todsichere Wette“ gegen uns abschließen kann.

Die Menge aller Aussagen, die man durch logische Verknüpfung oder Bedingungsbildung aus einer Grundmenge von Aussagen bilden kann, nennt man auch den *De Finetti-Abschluss* dieser Grundmenge von Aussagen. Die Frage ist nun, welche Wahrscheinlichkeiten wir den verknüpften und bedingten Aussagen zuweisen müssen, damit sie konsistent in dem Sinne sind, dass man keine „todsichere Wette“ gegen sie abschließen kann? Das zentrale Theorem der subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie besagt, dass dies *genau dann* der Fall ist, wenn die dem System dieser Aussagen (i.e. dem *De Finetti-Abschluss*) zugewiesenen Wahrscheinlichkeitswerte den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehorchen, d.h. wenn sie die kolmogorowschen Axiome erfüllen.

*Ramsey-De Finetti Theorem:* Die einer Menge von Aussagen zugewiesenen subjektiven Wahrscheinlichkeiten sind genau dann in sich konsistent (in dem Sinne, dass keine „todsicheren Wetten“ möglich sind), wenn sie den kolmogorowschen Axiomen gehorchen.

Dieses Theorem stellt eine Beziehung her zwischen einer grob an den empirischen Phänomenen des Wettens orientierten Konsistenzbedingung und den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wir werden zunächst den Beweis des Theorems führen und dann, wie schon bei den anderen Interpretationen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs auch, die Argumente untersuchen, die für oder gegen die Annahme subjektiver Wahrscheinlichkeiten sprechen.

**Beweis des Ramsey-De Finetti Theorems** Für den Beweis müssen wir präzisieren, was wir unter einer Wette verstehen. Dazu sind zunächst die Rollen des Wettenden und des Buchmachers zu unterscheiden. Der Wettende darf festlegen welche Wahrscheinlichkeiten er allen Aussagen bzw. Ereignissen zuweist. Der Buchmacher darf anschließend entscheiden, ob er dafür oder dagegen wettet, d.h. er legt einen positiven oder negativen Wettbetrag  $S$  („ $S$ “ wie „stakes“) für die Wette fest. Die Wette spielt sich dann immer folgendermaßen ab, zunächst muss der Wettende den Betrag  $qS$  (bei einem Treuhänder) einzahlen. Gewinnt er die Wette, d.h. tritt das Ereignis ein, dann bekommt er den Betrag  $S$  zurück. Verliert er die Wette, so verliert er seine Einzahlung. Legt der Buchmacher den Wettbetrag auf einen negativen Wert  $S$  fest, dann sind auch die Ein- und Auszahlungen entsprechend negiert. Dann muss zunächst der Buchmacher einen Betrag von  $q \cdot |S|$  einzahlen, und bekommt  $|S|$  ausgezahlt, wenn das Ereignis eintritt. Es mag etwas sonderbar erscheinen, dass der Buchmacher entscheiden darf, ob er „dafür“ oder „dagegen“ wettet, aber andernfalls hätte die Zuweisung eines Wettquotienten durch den Wettenden wenig Sinn, da er ihn schon aus taktischen Gründen entweder möglichst hoch oder möglichst niedrig ansetzen würde, je nachdem, ob der Buchmacher gezwungen ist, dafür oder dagegen zu wetten. Nur wenn der Wettende nicht weiß, ob der Buchmacher dafür oder dagegen wettet, wird er seinen Wettquotienten exakt so wählen, wie es seiner Wahrscheinlichkeitseinschätzung entspricht.

Um den Beweis zu führen, zeigen wir zunächst, dass aus der Konsistenzannahme die kolmogorowschen Axiome folgen, und dann in einem zweiten Schritt, dass aus den Kolmogorowschen Axiomen die Konsistenz der Wahrscheinlichkeitszuweisungen folgt. Wir nehmen also an, dass wir eine Menge von Aussagen oder Ereignissen haben, denen konsistente Wahrscheinlichkeiten in dem oben beschriebenen Sinne zugewiesen worden sind. Dann gilt (Beweis nach Gillies (Gillies, 2000, S. 60ff.)):

1. *kolmogorowsches Axiom* (indirekter Beweis): Angenommen jemand weist irgendeinem Ereignis  $e$  eine Wahrscheinlichkeit  $q < 0$  zu, dann wird der Buchmacher immer gewinnen, wenn er  $S < 0$  wählt. (Da der Buchmacher  $S < 0$  gewählt hat, muss er  $q \cdot |S|$  „einzahlen“. Da aber  $q < 0$  heisst das in Wirklichkeit, dass er  $|q| \cdot |S|$  bekommt. Den Betrag hat der Buchmacher auf jeden Fall sicher. Gewinnt er dann noch die Wette, dann bekommt er sogar noch  $|S|$  oben drauf. Der Buchmacher hat also eine „todsichere Wette“ abgeschlossen.)

Wenn also das 1. kolmogorowsche Axiom verletzt wird, dann war die Wahrscheinlichkeitszuweisung auch inkonsistent im Sinne des Wettkriteriums. Da wir die Konsistenz aber voraussetzen, muss das 1. kolmo-

gorowsche Axiom erfüllt sein.

2. *kolmogorowsches Axiom* (indirekter Beweis): Angenommen einem beliebigen Ereignis  $e$  wurde eine Wahrscheinlichkeit  $q > 1$  zugewiesen, dann gewinnt der Buchmacher immer, wenn er  $S > 0$  wählt. (Der Wettende zahlt  $q \cdot S > S$  ein bekommt aber höchstens  $S$  zurück.) Um konsistent zu sein, darf also keinem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit größer 1 zugewiesen werden. Insbesondere gilt dies auch für ein Ereignis, dessen Eintreten sicher ist.

Angenommen der Wettende weist einem *sicheren* Ereignis  $\Omega$  eine Wahrscheinlichkeit  $q < 1$  zu, dann gewinnt der Buchmacher immer, wenn er  $S < 0$  wählt. (Dadurch wettet der Buchmacher für das Ereignis  $\Omega$ . Da das Ereignis sicher ist, bekommt der Buchmacher mit Sicherheit  $|S|$  für seine Einzahlung von  $q|S| < |S|$  zurück.) Um konsistent im Sinne des Wettkriteriums zu bleiben, darf also einem sicheren Ereignis auch niemals eine Wahrscheinlichkeit kleiner 1 zugewiesen werden.

3. *kolmogorowsches Axiom* (indirekter Beweis): Wir führen den Beweis in zwei Schritten. Zunächst wird gezeigt, dass aus den Konsistenz der Wahrscheinlichkeitszuweisungen folgt, dass für Wahrscheinlichkeiten einer beliebigen Menge sich (paarweise) wechselseitig ausschließender Ereignisse  $e_1, \dots, e_n$ , die zugleich ausschöpfend sind (d.h. eins davon tritt auf jeden Fall ein), gilt, dass  $P(e_1) + \dots + P(e_n) = 1$ . Dann wird gezeigt, dass daraus das 3. kolmogorowsche Axiom folgt.

Angenommen jemand weist einer Menge sich wechselseitig ausschließender, aber ausschöpfender Ereignisse  $e_1, \dots, e_n$  die Wahrscheinlichkeiten  $q_1, \dots, q_n$  zu. und der Buchmacher setzt für alle Wetten denselben Wettbetrag  $S$  an. Dann beträgt der Gewinn des Buchmachers, wenn das Ereignis  $E_i$  eintritt:

$$G = q_1 S + \dots + q_n S - S = S(q_1 + \dots + q_n - 1)$$

Wählt der Wettende die Wahrscheinlichkeiten so, dass  $q_1 + \dots + q_n > 1$ , dann gewinnt der Buchmacher immer, wenn er  $S > 0$  ansetzt. Wählt der Wettende die Wahrscheinlichkeiten so, dass  $q_1 + \dots + q_n < 1$ , so gewinnt der Buchmacher immer, wenn er  $S < 0$  wählt.

Also muss der Wettende, um konsistent zu bleiben  $q_1 + \dots + q_n = 1$  wählen. Hat er das aber (für jede Menge paarweise unvereinbarer und vollständig ausschöpfender Ereignisse) getan, dann erfüllen seine Wahrscheinlichkeitszuweisungen auch das 3. kolmogorowsche Axiom, denn:

### 3.2. WAHRSCHEINLICHKEITEN II: INTERPRETATIONSFRAGEN NICHT KLAUSURRELEVANT

Seien  $e$  und  $f$  zwei beliebige, sich wechselseitig ausschließende Ereignisse, dann gilt nach Voraussetzung für die Wahrscheinlichkeitszuweisung des Wettenden:

$$P(e) + P(f) + P(\neg(e \vee f)) = 1$$

Da  $e \vee f$  und  $\neg(e \vee f)$  sich aber ebenfalls ausschließen, eins von beiden Ereignissen aber eintreten muss, gilt ebenfalls:

$$P(e \vee f) + P(\neg(e \vee f)) = 1$$

Subtrahieren wir die zweite von der ersten Gleichung, so folgt das 3. kolmogorowsche Axiom:

$$\begin{aligned} P(e) + P(f) - P(e \vee f) &= 0 && \Leftrightarrow \\ P(e) + P(f) &= P(e \vee f) \end{aligned}$$

4. *Bedingte Wahrscheinlichkeit.* Zunächst ist zu erklären, was unter einer bedingten Wahrscheinlichkeit zu verstehen ist, wenn wir die Wahrscheinlichkeiten als Wettquotienten verstehen.  $P(e|f)$  ist zu verstehen als der Wettquotient, mit dem auf das Ereignis  $e$  gewettet wird, sofern  $f$  eintritt. Tritt  $f$  nicht ein, so findet keine Wette statt. Es handelt sich also um eine Art „Optionswette“. Zu zeigen ist nun, dass bei einer konsistenten Festlegung aller bedingten Wettquotienten, die bedingte Wahrscheinlichkeit im Sinne der Theorie subjektiver Wahrscheinlichkeiten der bedingten Wahrscheinlichkeit wie sie im Zusammenhang mit den kolmogorowschen Axiomen definiert wurde (141) entspricht. Dazu beweisen wir, dass bei konsistenter Zuweisung von Wettquotienten das Multiplikationsgesetz für bedingte Wahrscheinlichkeiten  $P(e \wedge f) = P(e|f) \cdot P(f)$  erfüllt ist. Es sei zunächst für zwei beliebige Ereignisse  $e$  und  $f$ :

- (a)  $a$  der Wettquotient des Ereignisses  $e \wedge f$ .
- (b)  $b$  der Wettquotient des Ereignisses  $e|f$ .
- (c)  $c$  der Wettquotient des Ereignisses  $f$ .

Seien weiterhin  $S_1, S_2, S_3$  die den entsprechenden Ereignissen vom Buchmacher zugewiesenen Wettbeträge, dann ergeben sich folgende Gewinnrechnungen für jeden der drei möglichen Fälle 1.  $e$  und  $f$  treten ein, 2.  $f$  tritt ein, aber nicht  $e$ , 3.  $f$  tritt nicht ein.<sup>11</sup>:

---

<sup>11</sup>Zwischen den Fällen  $\neg f \wedge e$  und  $\neg f \wedge \neg e$  braucht nicht unterschieden werden, da die Gewinnrechnung in beiden Fällen dieselbe ist:  $G_3 = a \cdot S_2 + c \cdot S_3$

$$(a) \quad G_1 = (a - 1) \cdot S_1 + (b - 1) \cdot S_2 + (c - 1) \cdot S_3$$

$$(b) \quad G_2 = a \cdot S_1 + b \cdot S_2 + (c - 1) \cdot S_3$$

$$(c) \quad G_3 = a \cdot S_1 + c \cdot S_3$$

(Was hier vorliegt ist ein Gleichungssystem mit drei unbekannten  $(S_1, S_2, S_3)$ . Zu zeigen ist also, dass die einzige Bedingung unter der dieses Gleichungssystem keine Lösung für  $G_1, G_2, G_3 > 0$ <sup>12</sup> hat, die ist, dass  $a = bc$ . Gäbe es nämlich eine solche Lösung, dann hätte der Buchmacher für die entsprechenden Werte von  $S_1, S_2, S_3$  seinen sicheren Gewinn.) Wenn der Buchmacher nun  $S_1 := 1$ ,  $S_2 := -1$  und  $S_3 := -b$  wählt, dann ergibt sich daraus für den Buchmacher folgende Gewinnrechnung:

$$(a) \quad G_1 = (a - 1) + (1 - b) + b - b \cdot c = a - b \cdot c$$

$$(b) \quad G_2 = a - b - b \cdot c + b = a - b \cdot c$$

$$(c) \quad G_3 = a - b \cdot c$$

D.h. der Buchmacher hat einen sicheren Gewinn, sofern für die Wahrscheinlichkeitszuweisungen nicht gilt  $a \leq b \cdot c$ . Wählt er aber  $S_1 := -1$ ,  $S_2 := 1$  und  $S_3 := b$ , dann hat er einen sicheren Gewinn, sofern für die Wahrscheinlichkeitszuweisungen nicht gilt  $a \geq b \cdot c$ . Das bedeutet aber, dass die Wettquotienten, um konstant zu sein sowohl  $a \leq b \cdot c$  als auch  $a \geq b \cdot c$  erfüllen müssen. Das ist aber nur möglich, wenn:

$$a = b \cdot c \quad \Leftrightarrow \quad P(e \wedge f) = P(e|f) \cdot P(f)$$

Also muss für die in dem oben erklärten Sinne bedingten Wettquotienten das Multiplikationsgesetz gelten, wenn sie konsistent sein sollen.

Damit wäre die eine Richtung des Äquivalenzbeweises zwischen der Wettkonsistenz und der kolmogorowschen Wahrscheinlichkeit abgeschlossen. Was noch aussteht, ist die andere Richtung des Beweises, d.h. dass aus der Erfüllung der kolmogorowschen Axiome durch eine Zuweisung von Wettquotienten zu Ereignissen auch die Konsistenz der Wettquotienten in dem Sinne folgt, dass ein gedachter Gegenspieler keine „todsicheren Wetten“ abschließen kann. Was wir zeigen müssen ist, dass der De Finetti Abschluss einer beliebigen Menge von Aussagen (bzw. Ereignissen) konsistent ist, sofern die kolmogorowschen Axiome erfüllt sind.

---

<sup>12</sup> $G_1, G_2, G_3$  decken alle drei möglichen Fälle ab, also müssen alle größer Null sein. Sonst wäre der Gewinn nicht mehr sicher, da ein Fall eintreten könnte, indem  $G \leq 0$

### 3.2. WAHRSCHEINLICHKEITEN II: INTERPRETATIONSFRAGEN NICHT KLAUSURRELEVANT

Wir betrachten zunächst die im De Finetti-Abschluss vorkommenden Aussagen als jeweils einzelne Aussagen. Erfüllen die Aussagen die Kolmogorowschen Axiome, dann gilt für jede Aussage, dass ihre Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 liegt. Dann ist es aber unmöglich für die Wette auf eine einzelne Aussage den Wettbetrag so zu festzulegen, dass der Buchhalter zwangsläufig gewinnt. (Auch wenn er in den Extremfällen, dass der Wettquotient  $q$  auf 0 oder 1 festgelegt worden ist, den Wettbetrag  $S$  so wählen kann, dass er nicht mehr verlieren kann, bedeutet dies noch nicht, dass ihm der Gewinn sicher ist. Insofern ist dann auch die Wette nicht „todsicher“.)

Als nächstes zeigen wir, dass auch die Wahrscheinlichkeiten von beliebigen oder-verknüpften Aussagen, soweit sie einander paarweise ausschließen und erschöpfend sind, konsistent sein müssen. Dazu leiten wir zunächst aus dem 3. kolmogorowschen Axiom ab, dass sich die Wahrscheinlichkeiten einer Menge von Aussagen (bzw. Ereignissen)  $e_1, \dots, e_n$ , die sich paarweise ausschließen und ausschöpfend sind zu eins aufsummieren müssen. Durch entsprechende Klammerung kann man das, was im 3. kolmogorowschen Axiom für zwei unvereinbare Aussagen ausgesagt wird, leicht auf  $n$  paarweise unvereinbare Aussagen übertragen, d.h. es gilt:

$$P(e_1 \vee \dots \vee e_n) = P(e_1) + \dots + P(e_n)$$

Wenn die Ereignisse  $e_1, \dots, e_n$  aber ausschöpfend sind, dann gilt, dass  $e_1 \vee \dots \vee e_n$  sicher ist und damit  $P(e_1 \vee \dots \vee e_n) = 1$ . Dann gilt aber auch:

$$P(e_1) + \dots + P(e_n) = P(e_1 \vee \dots \vee e_n) = 1$$

Zur Vereinfachung schreiben wir für die Wahrscheinlichkeiten  $P(e_1), \dots, P(e_n)$  im folgenden  $q_1, \dots, q_n$ . Aus der Gleichung ergibt sich, dass mindestens ein  $q_i \geq 0$ . Wenn der Buchmacher den Wetten auf die Ereignisse  $e_1, \dots, e_n$  die Wettbeträge  $S_1, \dots, S_n$  zuweist, dann berechnet sich der Gewinn, den er erhält, falls das  $i$ -te Ereignis eintritt nach:

$$G_i = q_1 S_1 + \dots + q_n S_n - S_i$$

Da wir für jedes  $i$  (im Bereich  $1 \leq i \leq n$ ) eine solche Gleichung aufstellen, verfügen wir über  $n$  derartige Gleichungen. Jede dieser Gleichungen können wir auf beiden Seiten mit dem entsprechenden  $q_i$  noch einmal multiplizieren. Wir erhalten dann eine Schar von Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned} q_1 G_1 &= q_1(q_1 S_1 + \dots + q_n S_n) - q_1 S_1 \\ &\vdots \\ q_n G_n &= q_n(q_1 S_1 + \dots + q_n S_n) - q_n S_n \end{aligned}$$

Wenn wir diese Gleichungen aufaddieren, dann erhalten wir folgende Bedingung für die Gewinne, die der Buchmacher erzielen kann:

$$q_1 G_1 + q_2 G_2 + \dots + q_n G_n = 0$$

Inhaltlich entspricht die rechte Seite der Gleichung übrigens dem Erwartungsnutzen des Buchmachers unter Zugrundelegung der subjektiven Wahrscheinlichkeiten des Wettenden, d.h. die Bedingung besagt, dass der Erwartungsnutzen des Buchmachers 0 sein muss. Wenn der Erwartungsnutzen des Buchmachers 0 ist, dann kann er aber keine „todsichere Wette“ mehr abschließen, denn: Für ihn ist nur dann ein sicherer Gewinn möglich, wenn *alle*  $G_i$  positiv, d.h. echt größer 0 sind. (Andernfalls hätte er, wenn irgend ein  $G_k \leq 0$ , dann keinen Gewinn, wenn das  $k$ -te Ereignis eintritt, damit wäre seine Wette aber nicht mehr „todsicher“.) Es können aber nicht alle  $G_i$  positiv sein, da wegen  $q_i \geq 0 \forall_i$  (1. kolmogorowsches Axiom) und  $\exists_k i q_k > 0$  (wg.  $\sum q_i = 1$ ) die Summe auf der linken Seite der Gleichung sonst nicht 0 werden könnte.

Damit ist gezeigt, dass auch die oder-Verknüpfung von paarweise unvereinbaren aber den Ereignisraum ausschöpfenden Aussagen konsistent ist, sofern die zugewiesenen Wettquotienten den kolmogorowschen Axiomen gehorchen. So wie der Beweis geführt wurde, war es dem Buchmacher dabei sogar gestattet, den Wettbetrag nicht nur für die Gesamtaussage sondern für jedes Teilglied festzulegen. Dennoch ist keine „todsichere Wette“ möglich. Daraus folgt aber unmittelbar, dass wenn für jede oder-Verknüpfte Gesamtaussage (bestehend aus wechselweise unvereinbaren und ausschöpfenden Teilaussagen) schon keine „todsichere Wette“ möglich ist, dann auch für keine der Teilaussagen, denn sonst bräuchte der Buchmacher nur für die Teilaussage, für die eine „todsichere Wette“ möglich ist, den Wettbetrag entsprechend festzulegen und für alle weiteren Teilaussagen den Wettbetrag auf Null zu setzen, um eine todsichere Wette auf die Gesamtaussage abzuschließen.

Daraus ergibt sich wiederum unmittelbar, dass der Buchmacher auch auf wechselseitig unvereinbare aber nicht ausschöpfende oder-verknüpfte Aussagen keine „todsichere Wette“ abschließen kann. Denn angenommen  $a$  sei eine solche Aussage, dann kann er auf  $a \vee \neg a$  keine „todsichere Wette“ abschließen, dann nach dem eben gesagten aber auch nicht auf  $a$ . In einem letzten Schritt kann nun gezeigt werden, dass der Buchmacher in der Tat auf überhaupt keine oder-verknüpfte Aussage eine todsichere Wette abschließen kann (also auch ohne die Voraussetzung paarweiser Ausschließlichkeit). Denn seien  $a$  und  $b$  zwei nicht ausschließliche Aussagen, dann ist die Aussage  $a \vee b$  äquivalent zu der Aussage  $(a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a) \vee (a \wedge b)$ . Diese drei Aussagen sind wechselweise unvereinbar. Da auf sie keine „todsichere Wette“ abgeschlossen



### 3.2. WAHRSCHEINLICHKEITEN II: INTERPRETATIONSFRAGEN NICHT KLAUSURRELEVANT

werden kann, kann auch auf die äquivalente Aussage  $a \vee b$  keine „todsichere Wette“ abgeschlossen werden.

Schließlich ist zu zeigen, dass auch bei und-verknüpften Aussagen keine „todsichere Wette“ möglich ist, sofern die kolmogorowschen Axiome erfüllt sind. Seien  $e$  und  $f$  zwei mögliche Ereignisse. Aus den kolmogorowschen Axiomen und der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ergibt sich bekanntlich das Multiplikationsgesetz  $P(e \wedge f) = P(e|f) \cdot P(f)$ . Wie schon zuvor legen wir zur Vereinfachung folgende abkürzende Bezeichnungen fest.

1.  $a = P(e \wedge f)$

2.  $b = P(e|f)$

3.  $c = P(f)$

Seien weiterhin  $S_1, S_2, S_3$  die den entsprechenden Ereignissen vom Buchmacher zugewiesenen Wettrbeträge. Wiederum sind dann vier Fälle zu unterscheiden, von allerdings zwei zusammen fallen, so dass sich hinsichtlich des Gewinns des Buchmachers drei Fälle ergeben:

1.  $e \wedge f: G_1 = (a - 1) \cdot S_1 + (b - 1) \cdot S_2 + (c - 1) \cdot S_3$

2.  $\neg e \wedge f: G_2 = a \cdot S_1 + b \cdot S_2 + (c - 1) \cdot S_3$

3.  $\neg f: G_3 = a \cdot S_2 + c \cdot S_3$

Zu zeigen ist, dass, wenn wir gemäß dem Multiplikationsgesetz  $a = b \cdot c$  voraussetzen, die Gewinne nicht alle positiv sein können. Es genügt zu zeigen, dass der Erwartungsnutzen des Buchmachers (bezüglich der Wahrscheinlichkeiten des Wettenden) gleich 0 ist (siehe Seite 176). Der Erwartungsnutzen des Buchmachers berechnet sich nach:

$$\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3$$

mit:

$$\lambda_1 = b \cdot c, \quad \lambda_2 = (1 - b) \cdot c, \quad \lambda_3 = 1 - c$$

(wovon man sich überzeugen kann, wenn man sich überlegt, in welchen Fällen welches  $\lambda$  herangezogen werden muss).

Durch Einsetzen der obigen Gleichungen und Ausklammern von  $S_1, S_2$  und  $S_3$  erhält man:

$$\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 = \alpha S_1 + \beta S_2 + \gamma S_3$$

wobei:

$$\alpha = bc(a - 1) + (1 - b)ca + (1 - c)a$$

$$\begin{aligned}\beta &= bc(b-1) + (1-b)cb \\ \gamma &= bc(c-1) + (1-b)c(c-1) + (1-c)c\end{aligned}$$

Durch Ausrechnen und Substitution mit Hilfe der Voraussetzung  $a = b \cdot c$  lässt sich zeigen, dass  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Da wenigstens ein  $\lambda > 0$  ist (die durch  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  angegebenen Wahrscheinlichkeiten decken alle möglichen Fälle ab, summieren sich also zu 1) folgt, dass keine „todsichere Wette“ für den Buchmacher möglich ist. Das betrifft sowohl und-verknüpfte Aussagen als auch bedingte Wahrscheinlichkeiten.

Dass aus der Erfüllung der kolmogorowschen Axiome wiederum die Konsistenz der Wahrscheinlichkeiten (im Sinne des Wettkriteriums) folgt, hat eine wichtige Konsequenz in Fällen, in denen neue Informationen bekannt werden, die geeignet sind, die Wahrscheinlichkeiten, die wir bestimmten Ereignissen zuweisen, zu ändern. Da wir wissen, dass Wahrscheinlichkeiten, die wir durch „Bedingungsbildung“ (*conditionalization*) erhalten, wiederum die kolmogorowschen Axiome erfüllen, können wir auch davon ausgehen, dass wir durch die Ersetzung sämtlicher Wahrscheinlichkeiten mit den durch die Information „bedingten“ Wahrscheinlichkeiten, wieder ein System (genauer einen „De Finetti-Abschluss“) konsistenter subjektiver Wahrscheinlichkeiten erhalten. Die Bedingungsbildung geht dabei immer so vor sich, dass wir  $P(a)$  durch  $P(a|I)$  ersetzen und  $P(a|b)$  durch  $P(a|(b \wedge I))$ , wobei  $a$  eine beliebige Aussage bzw. ein beliebiges Ereignis unseres Systems ist, und  $I$  die neu hinzugekommene Information. (Da bei Aussagen, die unabhängig von  $I$  sind, sowieso  $P(a|I) = P(a)$  gilt, können wir die Bedingungsbildung unbedenklich auf alle Aussagen des Systems anwenden.)

**Diskussion** Der zuvor geführte Beweis hat gezeigt, dass die Konsistenz subjektiver Wahrscheinlichkeiten im Sinne der Absicherung gegen „todsichere Wetten“ und die Erfüllung der kolmogorowschen Axiome ein- und dasselbe sind. Anders als bei der Häufigkeitstheorie handelt es sich dabei um einen Äquivalenzbeweis, der in beide Richtungen funktioniert. Dies verleiht der Theorie der subjektiven Wahrscheinlichkeiten von einem mathematischen Blickwinkel aus gesehen von vorn herein eine größere Plausibilität. Ein solches Problem, wie dasjenige, dass das „Gesetz der großen Zahlen“ durch den eingeführten konkreten Wahrscheinlichkeitsbegriff unterboten wird, wie im Falle der Häufigkeitstheorie geschehen, kann also nicht auftreten.

Eine andere Frage ist allerdings die, inwieweit die subjektive Wahrscheinlichkeitstheorie an empirische Wahrscheinlichkeitsphänomene anknüpfen kann. Hier konnte die Häufigkeitstheorie, die sich ziemlich nahtlos an die Statistik anknüpfen lässt, punkten. Befürworter der subjektiven Wahrscheinlichkeiten können ihren Wahrscheinlichkeitsbegriff freilich auch in die-

### 3.2. WAHRSCHEINLICHKEITEN II: INTERPRETATIONSFRAGEN NICHT KLAUSURRELEVANT

sem Zusammenhang verteidigen. Denn sofern die subjektiven Wahrscheinlichkeiten durch neue Informationen über statistische Stichproben erneuert („updated“) werden, so konvergieren die subjektiven Wahrscheinlichkeiten auf lange Sicht gegen den statistischen Häufigkeitswert. Die entsprechenden Konvergenztheoreme bilden einen wichtigen Teil der subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie und eine Stütze des sogenannten Bayesianismus, d.i. – vereinfacht ausgedrückt – die Meinung, dass der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff der einzige ist, den wir benötigen. Im Einzelnen darauf einzugehen, würde an dieser Stelle zu weit führen. Näheres dazu bei Gillies (Gillies, 2000). Zur Veranschaulichung hilft es sich an das Beispiel medizinischer Tests aus der letzten Vorlesung zu erinnern. Je mehr Tests durchgeführt werden, um so mehr nähert sich das Resultat dem tatsächlichen Wert (in diesem Fall entweder krank oder nicht krank) an. Ähnlich funktioniert das „updating“, wie es der Bayesianismus versteht. Es sollte jedoch erwähnt werden, dass es sich dabei um eine durchaus umstrittene Auffassung handelt. Ein möglicher Einwand läuft darauf hinaus, dass auch die Theorie subjektiver Wahrscheinlichkeiten, sofern ihre Anwendbarkeit auf statistische Phänomene behauptet wird, implizit objektive Wahrscheinlichkeiten voraussetzt, nur dass sie diese nicht mehr erklärt – anders als die Häufigkeitstheorie.

In diesem Zusammenhang ist auch darauf hinzuweisen, dass das Messbarkeitsproblem bei subjektiven Wahrscheinlichkeiten kein zu unterschätzendes Problem darstellt. Der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff ist, anders als zumeist behauptet bzw. naiv vorausgesetzt wird (Gillies, 2000, p. 69), meist nicht ohne Weiteres operationalisierbar. (*Operationalisierbar* ist ein Begriff dann, wenn man ihn auf messbare Größen zurückführen kann.) Denn das durch die Theorie suggerierte Messverfahren zur Bestimmung von Wettquotienten ist alles andere als zuverlässig. Es genügt nicht, irgendein (gewaltsames) Bestimmungsverfahren für eine Größe zu haben, sondern die damit gemessene Größe muss auch einigermaßen genau und stabil sein. Die damit verbundene Schwierigkeit schränken die empirische Anwendbarkeit dieses Konzepts ein, sie schließen aber nicht aus, dass man das Konsistenzkriterium in normativer Absicht anwendet. Denn dass man sich beim Treffen von Entscheidungen konsequent verhalten *soll* erscheint nur plausibel. Das Konsistenzkriterium und die Theorie subjektiver Wahrscheinlichkeiten liefert die Mittel dazu.

### 3.2.3 Aufgaben

1. Das „Gesetz der großen Zahlen“ besagt, dass in allen Zufallsfolgen der Häufigkeitsgrenzwert eines Merkmals  $A$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 gleich dem Wahrscheinlichkeitswert  $r$  von  $A$  ist. Um einzusehen, dass dies nicht ein- und dasselbe ist, wie zu sagen, der Häufigkeitsgrenzwert beträgt  $r$ , muss man sich klar machen, dass eine Wahrscheinlichkeit von 1 noch nicht bedeutet, dass irgendein Ereignis mit Sicherheit eintritt. (Zur Erinnerung: Die Kolmogorowschen Axiome fordern lediglich, dass ein sicheres Ereignis die Wahrscheinlichkeit 1 hat, aber nicht umgekehrt.) Finden Sie Beispiele für:

- (a) Eine Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit 0 ist, das aber trotzdem möglich ist.
- (b) Eine Ereignisfolge, innerhalb derer ein Merkmal unendlich oft auftritt, aber trotzdem die Wahrscheinlichkeit 0 hat.

(Übrigens, die Lösung zu dieser Aufgabe ist bereits an anderer Stelle in diesem Skript versteckt. Aber Nachdenken lohnt mehr als suchen...)

2. Das dritte kolmogorowsche Axiom besagt, dass für Ereignisse, die sich ausschließen gilt:

$$P(p \vee q) = P(p) + P(q)$$

Zeige, dass das dritte Axiom *äquivalent* ist zu dem Axiom 3\*: Seien  $q_1, \dots, q_n$  Ereignisse, die sich paarweise ausschließen (Exklusivität), von denen aber eins eintreten muss (Vollständigkeit), dann gilt:

$$P(q_1) + \dots + P(q_n) = 1$$

3. Zeige, dass man durch aufsummieren der Gleichungen:

$$q_i G_i = q_i(q_i S_i + \dots + q_n S_n) - q_i S_i \quad \text{mit} \quad 1 \leq i \leq n$$

über den index  $i$  das Ergebnis:

$$q_1 G_1 + q_2 G_2 + \dots + q_n G_n = 0$$

erhält, sofern  $\sum_{i=1}^n q_i = 1$

4. Zeige durch Ausrechnen und unter Verwendung von  $a = b \cdot c, 0 \leq a, b, c \leq 1$ , dass in den folgenden drei Gleichungen sowohl  $\alpha$  als auch  $\beta$  und  $\gamma$  Null sind werden.

$$\alpha = bc(a - 1) + (1 - b)ca + (1 - c)a$$

### 3.2. WAHRSCHEINLICHKEITEN II: INTERPRETATIONSFRAGEN NICHT KLAUSURRELEVANT

$$\beta = bc(b-1) + (1-b)cb$$

$$\gamma = bc(c-1) + (1-b)c(c-1) + (1-c)c$$

5. Wenn ein Wettender über eine Informationen  $I$  verfügt, die für die Ereignisse, auf die gewettet werden kann, relevant ist, dann muss er seine Wahrscheinlichkeiten entsprechend  $P_{neu}(a) = P_{alt}(a|I)$  anpassen. Zeige: Wenn der Wettende für irgendeine Aussage  $a$  die Wahrscheinlichkeit  $P_{neu}(a) \neq P_{alt}(a|I)$  wählt, dann ist es für einen geschickten Buchmacher möglich eine „todsichere Wette“ abzuschließen. *Hinweis:* Der Buchmacher muss dazu sowohl auf  $a$  als auch auf  $I$  eine Wette abschließen und die Wettbeträge entsprechend aufeinander abstimmen. Dabei weiß er, ob  $P_{neu}(a) < P_{alt}(a|I)$  oder  $P_{neu}(a) > P_{alt}(a|I)$ .



# Kapitel 4

## Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie

### 4.1 Die Neumann-Morgensternsche Nutzen- theorie

Schon zuvor (Kapitel 1.4) wurde gezeigt, wie man mit Hilfe des Erwartungsnutzens Entscheidungen unter Risiko treffen kann. In diesem Kapitel werden wir auf die theoretischen Grundlagen des Erwartungsnutzens und besonders des sogenannten „Neumann-Morgensternschen“ Nutzenbegriffs eingehen, der schon früher als „kardinale Nutzenfunktion“ eingeführt wurde (siehe Kapitel 1.3.2).

Die Grundidee der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie besteht darin, neben den bestehenden Gütern (bzw. den Ergebnissen von Entscheidungsprozessen) „Lotterien“ als gedachte Güter einzuführen und durch den Vergleich (hinsichtlich der Präferenzrelation) von Lotterien und Gütern bzw. Lotterien untereinander sowie mit Hilfe von als selbst-evident angesehenen Konsistenzbedingungen eine kardinale Nutzenfunktion und das Prinzip des Erwartungsnutzens abzuleiten. Die folgende Darstellung lehnt sich vor allem an Resnik an (Resnik, 2000, S. 88-98). Wie sehen diese „Lotterien“ aus und wie kommen sie zu Stande?

Begriff der  
„Lotterie“

Grundsätzlich ist eine Lotterie immer eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über einer disjunkten, aber zugleich erschöpfenden Menge von Ereignissen. Kompliziert und, wenn es sich nicht gerade um Geldwerte handelt, zugegebenermaßen etwas unplausibel wird die Theorie dadurch, dass diese Lotterien als mögliche Güter bzw. erzielbare Ergebnisse eines Entscheidungsprozesses in die Präferenzrelation eingeordnet werden können müssen. Das stellt sich dann etwa wie folgt dar:

Problematik  
der Präferenz-  
bestimmung  
bei Lotterien

Angenommen jemand ordnet seine Präferenzen bezüglich der drei Güter „Eiscreme“, „Joghurt“ und „Trockenes Brot“ auf diese Weise:

$\text{Eiscreme} \succ \text{Joghurt} \succ \text{Trockenes Brot}$

Dann postuliert die Theorie,<sup>1</sup>, dass es eine Lotterie mit zwei möglichen Preisen, nämlich „Eiscreme“ als Hauptgewinn und „Trockenes Brot“ als Niete gibt (wobei man den Hauptgewinn mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit  $a$  erhält und die Niete dementsprechend mit der inversen Wahrscheinlichkeit  $1 - a$ ), so dass zwischen dieser Lotterie und dem in der Mitte eingeordneten Gut „Joghurt“ Indifferenz herrscht. Angenommen eine Person speist gerne Joghurt, so dass dieser Indifferenzpunkt bei einer Gewinnwahrscheinlichkeit von  $a = 80\%$  erreicht wird. Dann gilt, wenn wir unsere gedachte Lotterie mit „Lotterie ( $a=0.8$ , Eiscreme, Trockenes Brot)“ bezeichnen:

Lotterie ( $a=0.8$ , Eiscreme, Trockenes Brot)  $\sim$  Joghurt

Wozu in aller Welt soll das gut sein? Und woher soll nun einer wissen, ob er zwischen Joghurt und einer 80%-igen Gewinnchance auf Eiscreme (bei Strafe von trockenem Brot) indifferent ist und nicht etwa einer 70%-igen oder 60%-igen etc.? Die Antwort auf die erste Frage ist, dass sich damit eine raffinierte, und unter einer großen Gruppe von Ökonomen und einer kleinen Gruppe von Philosophen überaus populäre Nutzentheorie aufbauen lässt, die wir gleich kennen lernen werden. Die Antwort auf die zweite Frage stellt eine etwas schwierige Angelegenheit dar, die man lange diskutieren müsste. So recht überzeugend lässt sie sich, wenn es sich nicht gerade mal wieder um Geldwerte handelt, offen gestanden nicht beantworten, so dass wir an dieser Stelle schon eine gehörige Portion guten Willen mitbringen müssen, um die Theorie zu akzeptieren. Zugleich wird an dieser Stelle deutlich, warum es mit dem Hilfsmittel der Lotterien immer möglich ist, aus beliebigen wohlgeformten Präferenzen eine kardinale Nutzenfunktion zu erzeugen: Indem wir unserem Akteur nämlich eine definitive Wahrscheinlichkeitsangabe abnötigen, zwingen wir ihn zu genau der Zahlenangabe, die wir brauchen, um eine Intervallskala zu konstruieren, und die uns beim bloß ordinalen Nutzen fehlt.

Ist man dazu bereit, sich die Theorie trotz ihrer m.E. zweifelhaften Voraussetzungen anzuhören, so wird man Lotterien der Einfachheit halber in der Form darstellen:

Formale  
Darstellung  
von Lotterien

$$L(a, x, y)$$

Dabei sind  $x$  und  $y$  zwei beliebige Güter (bzw. Ergebnisse).  $a$  ist die Wahrscheinlichkeit, mit der der Gewinn  $x$  herauskommt, und  $1 - a$  ist dementspre-

<sup>1</sup>Siehe die „Kontinuitätsbedingung“ weiter unten auf Seite 186.



chend die Wahrscheinlichkeit mit der die „Niete“  $y$  gezogen wird. In allgemeiner Form, d.h. bei mehr als zwei Gütern, werden Lotterien so dargestellt:

$$L((p_1, \dots, p_n), (x_1, \dots, x_n)) \quad p_1 + \dots + p_n = 1$$

wobei  $x_1, \dots, x_n$  ein Tupel von  $n$  Gütern (oder Ergebniss) ist und  $p_1, \dots, p_n$  die Wahrscheinlichkeiten mit der das jeweilige Gut „gewonnen“ wird. Im Folgenden werden wir uns aber auf zwei-stellige Lotterien beschränken, da man mehrstellige Lotterien nach der Reduzierbarkeitsbedingung (siehe unten, Seite 186) immer auf zweistellige zurückführen kann.

Wenn man schon zulässt, dass Güter mit dieser Art von Lotterien darauf hin verglichen werden können, ob irgendein Akteur indifferent zwischen ihnen ist, dann ist es nur ein kleiner Schritt, auch noch Lotterien mit Lotterien zu vergleichen. D.h. wenn  $L_1(a_1, x_1, y_1)$  eine Lotterie ist und  $L(a_2, x_2, y_2)$  eine weitere, dann kann man für jedes Gut oder jede Lotterie die bezüglich der Präferenzen des Akteurs zwischen  $L_1$  und  $L_2$  eingeordnet ist eine Lotterie  $L(b, L_1, L_2)$  konstruieren, so dass der Akteur zwischen dieser Lotterie und dem mittleren Gut (oder der mittleren Lotterie) indifferent ist.

Auf diese Weise kann man nach folgenden drei Regeln eine „vollständige Menge“<sup>2</sup> von Lotterien konstruieren (Resnik, 2000, S. 91):

Definition der  
Menge aller  
Lotterien

1. Jedes *Grundgut* („basic prize“) ist eine Lotterie. (Im Zweifelsfall kann man für ein Gut  $x$  ja immer die Lotterie  $L(1, x, x)$  nehmen.) Es wird weiterhin angenommen, dass es ein oder mehrere beste bzw. schlechteste Grundgüter gibt (was immer gegeben ist, wenn die Menge der Grundgüter endlich ist).
2. Wenn  $L_1$  und  $L_2$  Lotterien sind, dann auch  $L(a, L_1, L_2)$  für jedes beliebige  $a$  mit  $0 \leq a \leq 1$ .
3. Es gibt keine Lotterien außer den nach den ersten beiden Regeln konstruierten.

Weiterhin wird verlangt, dass für die Lotterien folgende Bedingungen gelten (Resnik, 2000, S. 90-92) :

„Konsistenz“-  
bedingungen  
von Lotterien

1. *Ordnungsbedingung*: Auf der vollständigen Menge der Lotterien ist eine Präferenzrelation definiert, (die bezüglich der ursprünglichen Güter mit der auf der Menge dieser Güter definierten Präferenzrelation übereinstimmen sollte.)

<sup>2</sup>Dieses Verfahren, aus einer Grundmenge mit Hilfe bestimmter „Produktionsregeln“ einen „Abschluss“ zu erzeugen (wobei ein *Abschluss* allgemein als die Menge aller derjenigen Objekte verstanden werden kann, die aus einer Menge von Grundobjekten mit Hilfe gegebener Produktionsregeln erzeugt werden können), ist uns schon bei dem *De Finetti-Abschluss* in der letzten Vorlesung begegnet (siehe Seite 170).

Kontinuitäts-  
bedingung

2. *Kontinuitätsbedingung*: Für beliebige Lotterien  $x, y$  und  $z$  gilt: Wenn  $x \succ y \succ z$ , dann gibt es eine Lotterie  $L(a, x, z)$ , so dass  $y \sim L(a, x, z)$ .
3. *Bedingung der höheren Gewinne*: Für beliebige Lotterien  $x, y$  und  $z$  und jede beliebige Wahrscheinlichkeit  $a > 0$  gilt:  $x \succ y$  genau dann wenn  $L(a, x, z) \succ L(a, y, z)$ . (Einfach gesagt: Eine Lotterie wird dann vorgezogen, wenn man „höhere Preise“ gewinnen kann.)
4. *Bedingung der besseren Chancen*: Für jedes Paar von Lotterien  $x$  und  $y$  und beliebige Wahrscheinlichkeiten  $a$  und  $b$  gilt: Wenn  $x \succ y$  dann ist  $L(a, x, y) \succ L(b, x, y)$  genau dann wenn  $a > b$ . (Einfach gesagt: Bei gleichen Preisen wird die Lotterie mit den besseren Chancen bevorzugt.)

Reduzier-  
barkeit von  
Lotterien

5. *Reduzierbarkeit zusammengesetzter Lotterien*: Für jede zusammengesetzte Lotterie der Form  $L(a, L(b, x, y), L(c, x, y))$  gilt:

$$L(a, L(b, x, y), L(c, x, y)) \sim L(ab + (1 - a) \cdot c, x, y)$$

(Einfach ausgedrückt: Zusammengesetzte Lotterien können entsprechend den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf einfachere reduziert werden.)

Wenigstens die zweite und dritte dieser Bedingungen kann man als selbst-evident betrachten. Die anderen Bedingungen sind zumindest plausibel, wenn man sich überhaupt auf das Gedankenexperiment mit den „Lotterien“ einlässt. Nun lässt sich beweisen, dass man, wenn diese Bedingungen gegeben sind, eine Nutzenfunktion konstruieren kann, die die Erwartungsnutzeneigenschaft hat, und die zugleich eine kardinale Nutzenfunktion ist. Insgesamt muss die so konstruierte Nutzenfunktion  $u$  also die folgenden Eigenschaften haben:

Bed. f.  
kardinale Nut-  
zenfunktionen  
mit Erwart-  
ungsnutzenei-  
genschaft

1.  $u(x) > u(y)$  genau dann wenn  $x \succ y$
2.  $u(x) = u(y)$  genau dann wenn  $x \sim y$
3.  $u(L(a, x, y)) = au(x) + (1 - a)u(y)$  (*Erwartungsnutzeneigenschaft*)
4. Jede Nutzenfunktion  $u'$ , welche die ersten drei Bedingungen erfüllt, kann durch positiv lineare Transformation in die Nutzenfunktion  $u$  überführt werden.

Wie kann man das beweisen? Resnik folgend kann der Beweis in zwei Schritten geführt werden, indem zuerst die *Existenz* einer Nutzenfunktion bewiesen wird, die die ersten drei Eigenschaften erfüllt, und dann die *Eindeutigkeit* dieser Nutzenfunktion bis auf positive lineare Transformation.

### 4.1.1 Vorbereitung des Beweises

Bevor wir diesen Beweis führen, sollen einige unmittelbare Corrolarien der Bedingung der höheren Gewinne und der Bedingung der besseren Chancen vorgestellt werden, die uns helfen, den folgenden Beweis leichter zu führen. Für den Beweis dieser Corrolarien verwenden wir die Tatsache, dass die Lotterie  $L(a, x, y)$  identisch ist mit der Lotterie  $L(1 - a, y, x)$  und daher entsprechend ersetzt werden kann.

1. *Corrolar zur Bedingung der besseren Chancen:*

$$\forall_{x,y} \forall_{a,b} \quad x \prec y \Rightarrow L(a, x, y) \prec L(b, x, y) \quad \Leftrightarrow \quad a > b$$

*Beweis:* Sei  $x \prec y$ , dann ist  $y \succ x$ , dann gilt aber nach der Bedingung der besseren Chancen:

$$\begin{aligned} L(1 - b, y, x) \succ L(1 - a, y, x) &\Leftrightarrow 1 - b > 1 - a \\ L(b, x, y) \succ L(a, x, y) &\Leftrightarrow b < a \\ L(a, x, y) \prec L(b, x, y) &\Leftrightarrow a > b \end{aligned}$$

2. *Corrolar zur Bedingung der besseren Chancen:*

$$\forall_{x,y} \forall_{a,b} \quad x \not\succ y \Rightarrow L(a, x, y) \not\succ L(b, x, y) \quad \Leftrightarrow \quad a \neq b$$

*Beweis:* Wenn  $x \not\succ y$ , dann ist entweder  $x \succ y$  oder  $x \prec y$ . Wenn  $x \succ y$ , dann ist nach der Bedingung der besseren Chancen entweder  $L(a, x, y) \succ L(b, x, y) \Leftrightarrow a > b$  oder  $L(b, x, y) \succ L(a, x, y) \Leftrightarrow b > a$ , also in jedem Fall  $L(a, x, y) \not\succ L(b, x, y) \Leftrightarrow a \neq b$ . Wenn aber  $x \prec y$ , dann folgt aus dem vorherigen Corrolar auf dieselbe Weise, dass  $L(a, x, y) \not\succ L(b, x, y) \Leftrightarrow a \neq b$ . Da dieser Ausdruck sowohl für  $x \succ y$  als auch für  $x \prec y$  folgt, folgt er in jedem Fall für  $x \not\succ y$ .

3. *Corrolar zur Bedingung der höheren Gewinne:*

$$\forall_{x,y,z} \forall_{a < 1} \quad x \succ y \Leftrightarrow L(a, z, x) \succ L(a, z, y)$$

Inhaltlich bedeutet dies, dass die Bedingung der höheren Gewinne auf der zweiten Stelle der Lotterie ebenso gilt wie auf der ersten. *Beweis:* Da nach der Bedingung der höheren Gewinne  $x \succ y \Leftrightarrow L(b, x, z) \succ L(b, y, z)$  für alle  $b > 0$ , gilt für alle  $(1 - b) < 1$  auch  $x \succ y \Leftrightarrow L(1 - b, z, x) \succ L(1 - b, z, y)$ . Mit  $a := 1 - b$  gilt dann aber auch („ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ wie die Mathematiker sagen, da man für jedes  $1 - b$  ein entsprechendes  $a := 1 - b$  definieren kann) die Behauptung.

## 4. Corollar zur Bedingung der höheren Gewinne:

Für alle Lotterien  $x, y, z$  und alle  $a$  mit  $0 < a < 1$  gilt:

$$x \not\sim y \Leftrightarrow L(a, z, x) \not\sim L(a, z, y) \quad \wedge \quad L(a, x, z) \not\sim L(a, y, z)$$

Beweisskizze: Wenn  $x \not\sim y$ , dann ist entweder  $x \succ y$  oder  $x \prec y$ . In beiden Fällen ergibt sich die Implikation, dass  $(L(a, z, x) \not\sim L(a, z, y)) \wedge (L(a, x, z) \not\sim L(a, y, z))$  unmittelbar aus der Bedingung selbst. Zu zeigen ist nun noch, dass auch die umgekehrte Implikation gilt: Wenn  $(L(a, z, x) \not\sim L(a, z, y)) \wedge (L(a, x, z) \not\sim L(a, y, z))$  dann  $x \not\sim y$ . Wiederum sind zwei Fälle von  $\not\sim$  zu unterscheiden, nämlich  $\succ$  und  $\prec$ . Die Implikation ergibt sich dann wiederum unmittelbar aus der Bedingung selbst.

Substituierbarkeit von Lotterien

## 5. Corollar: Substitutionsgesetz:

$$\forall_{L^*} \forall_b \quad L^* \sim L(a, x, y) \Rightarrow L(b, L^*, z) \sim L(b, L(a, x, y), z)$$

Beweis: Aus dem vorhergehenden Corollar ergibt sich (bis auf die Sonderfälle  $b = 0$  und  $b = 1$ ), dass

$$L(b, L^*, z) \not\sim L(b, L(a, x, y), z) \Rightarrow L^* \not\sim L(a, x, y)$$

Im Umkehrschluss muss daher gelten:

$$L^* \sim L(a, x, y) \Rightarrow L(b, L^*, z) \sim L(b, L(a, x, y), z)$$

Für die Sonderfälle  $b = 0$  und  $b = 1$  gilt die Formel unmittelbar, wie man sich leicht überlegen kann.

## 4.1.2 Existenz der Nutzenfunktion

Um den Beweis der *Existenz* einer Nutzenfunktion mit der Erwartungsnutzeneigenschaft zu führen, konstruieren wir eine solche Funktion  $u$  und zeigen, dass sie eine Nutzenfunktion ist (Eigenschaften 1 und 2) und dass sie die Erwartungsnutzeneigenschaft besitzt (Eigenschaft 3). Dazu bezeichnen wir zunächst entsprechend Resniks Darstellung (Resnik, 2000, S. 94) das beste Gut als  $B$  („best“) und das schlechteste Gut als  $W$  („worst“). (In dem Fall, dass es mehrere beste oder schlechteste Güter gibt, bezeichnet  $B$  ein beliebiges bestes Gut und  $S$  ein beliebiges schlechtestes Gut.) Dann setzen wir fest:

Obere und untere Begrenzung der Nutzenskala

$$u(B) := 1 \quad \text{und} \quad u(W) := 0 \quad \text{für jede Lotterie } x \text{ mit} \quad x \sim B$$

$$u(W) := 0 \quad \text{und} \quad u(x) := 0 \quad \text{für jede Lotterie } x \text{ mit} \quad x \sim W$$

Nun betrachten wir eine beliebige Lotterie  $x$ , die hinsichtlich der Präferenzrelation zwischen  $B$  und  $W$  eingeordnet ist (also:  $B \succ x \succ W$ ). Nach der *Kontinuitätsbedingung* gibt es dann auch eine Lotterie  $L(a, B, W) \sim x$  mit einer Wahrscheinlichkeit  $a$ ,  $0 \leq a \leq 1$ . Wir können nun

Definition  
einer Nutzen-  
funktion  $u$

$$u(x) := a$$

setzen, falls die Wahrscheinlichkeit  $a$  eindeutig bestimmt ist. Das ist aber der Fall, weil für jedes  $a' \neq a$  auf Grund der *Bedingung der besseren Chancen* gilt:  $L(a', B, W) \not\sim L(a, B, W)$ . Da die Indifferenzrelation  $\sim$  transitiv ist („wohlgeformte Präferenzen“), muss dann auch gelten:  $L(a', B, W) \not\sim x$ .

Man beachte, dass aus der Definition  $u(x) := a$  für alle Lotterien  $x$  unmittelbar folgt:

$$x \sim L(u(x), B, W)$$

Genau dasselbe ist es zu sagen, dass für jede beliebige Lotterie  $L(a, x, y)$  gilt:

$$L(a, x, y) \sim L(u(L(a, x, y)), B, W)$$

Von diesem Zusammenhang werden wir weiter unten noch Gebrauch machen.

Mit  $u(x) = a$  haben wir dann aber bereits eine Funktion definiert, die jeder Lotterie  $x$  einen eindeutigen Wahrscheinlichkeitswert  $a$  zuordnet. Zu zeigen ist noch, dass es sich dabei um eine Nutzenfunktion mit der Erwartungsnutzeneigenschaft handelt. Dazu müssen wir zunächst nachweisen, dass die ersten drei der oben aufgeführten Eigenschaften für die so definierte Funktion  $u$  gegeben sind.

*Teilbeweis* der Eigenschaft  $u(x) > u(y)$  genau dann wenn  $x \succ y$ : Wenn  $u(x) = a$  für dasjenige  $a$ , für welches gilt  $L(a, B, W) \sim x$ , dann ergibt sich durch Einsetzen unmittelbar  $x \sim L(u(x), B, W)$ . Aufgrund der *Bedingung der besseren Chancen* wissen wir, dass

Monotonie  
von  $u$

$$L(u(x), B, W) \succ L(u(y), B, W) \quad \Leftrightarrow \quad u(x) > u(y)$$

Da jeweils gilt  $x \sim L(u(x), B, W)$  und  $y \sim L(u(y), B, W)$  können wir die Lotterien in der vorkommenden Äquivalenzaussage durch  $x$  und  $y$  ersetzen und erhalten das Gesuchte.

*Teilbeweis* der Eigenschaft  $u(x) = u(y)$  genau dann wenn  $x \sim y$ : Aus der *Bedingung der besseren Chancen* ergibt sich, dass

$$L(u(x), B, W) \sim L(u(y), B, W) \quad \Leftrightarrow \quad u(x) = u(y)$$

denn wäre  $u(x) \neq u(y)$ , dann wäre entweder  $u(x) > u(y)$  oder  $u(x) < u(y)$ , und in beiden Fällen besagt die Bedingung der besseren Chancen, dass dann

auch für die entsprechenden Lotterien  $\succ$  oder  $\prec$  gelten muss, so dass  $\sim$  nur noch gelten kann, wenn  $u(x) = u(y)$ . Durch Ersetzen analog zum Vorigen erhalten wir wiederum das Gesuchte.

*Teilbeweis* der Eigenschaft  $u(L(a, x, y)) = au(x) + (1 - a)u(y)$ . Um den Beweis zu führen bedienen wir uns des zuvor als Corollar bewiesenen Substitutionsgesetzes (siehe Seite 188). Der Einfachheit halber soll dabei  $L^*$  für die Lotterie  $L(a, x, y)$  stehen. Nach der Definition der Nutzenfunktion ( $u(x) := b$  für dasjenige  $b$ , für welches  $x \sim L(b, B, W)$ ), gilt:

$$x \sim L(u(x), B, W)$$

$$y \sim L(u(y), B, W)$$

Durch Substitution von  $x$  und  $y$  in der Lotterie  $L^*$  erhalten wir:

$$L^* \sim L(a, L(u(x), B, W), L(u(y), B, W))$$

Nach der *Reduzierbarkeitsbedingung* ergibt sich daraus:

$$L^* \sim L(a, L(u(x), B, W), L(u(y), B, W)) \sim L(d, B, W)$$

mit  $d = au(x) + (1 - a)u(y)$ . Da aber (nach unserer Definition von  $u$ ) gilt:  $L^* \sim L(u(L^*), B, W)$ , so erhalten wir daraus:

$$L(u(L^*), B, W) \sim L(d, B, W)$$

Da auf Grund der Bedingung der besseren Chancen, wie zuvor bewiesen, in diesem Falle  $u(L^*) = d$  sein muss, folgt das Gesuchte. Damit ist der Beweis der Existenz einer Nutzenfunktion, der die Erwartungsnutzeneigenschaft zukommt, abgeschlossen.

### 4.1.3 Eindeutigkeit der Nutzenfunktion

Die *Eindeutigkeit* der eben definierten Nutzenfunktion ist so zu verstehen, dass wir keine Nutzenfunktion mit der Erwartungsnutzeneigenschaft aus den Bedingungen für Lotterien herleiten können, die sich nicht positiv linear in alle anderen daraus ableitbaren Nutzenfunktionen mit Erwartungsnutzeneigenschaft transformieren lässt.

Wir müssen also zeigen, dass jede beliebige Nutzenfunktion mit Erwartungsnutzeneigenschaft  $u'$ , die die auf der vollständigen Menge der Lotterien definierte Präferenzrelation wiedergibt, eine positiv linear transformierte der eben konstruierten Nutzenfunktion  $u$  ist, dass also gilt:

$$u'(x) = au(x) + b \quad \text{mit} \quad a > 0$$

Der Beweis nach Resnik geht wie folgt (Resnik, 2000, S.97/98):

Angenommen, wir verfügen neben der oben konstruierten Nutzenfunktion  $u$  noch über eine weitere Nutzenfunktion mit Erwartungsnutzeneigenschaft  $u'$ , die die vollständige Menge der Lotterien auf eine andere Nutzenskala abbildet. Aus dem Erwartungsnutzenprinzip ergibt sich, dass beide Abbildungen *surjektiv* sind (d.h. dass jeder Wert der Nutzenskala innerhalb des Intervalls zwischen dem größten und dem kleinsten Nutzenwert ein Nutzenwert irgendeiner Lotterie ist), denn (Beweisskizze) sei  $x$  eine Lotterie, die den höchsten möglichen Nutzenwert hat, und  $y$  eine Lotterie, die den kleinsten möglichen Nutzenwert hat, und sei  $j$  irgendein Nutzenwert dazwischen, dann hat mit  $a := (j - u(y))/(u(x) - u(y))$  die Lotterie  $L(a, x, y)$  genau den Nutzenwert  $j$ . Da dies für jedes beliebige  $j$  gilt, gehören alle reellen Zahlen auf der Skala innerhalb des Bereiches vom kleinsten bis zum größten Nutzenwert zum Wertebereich der Nutzenfunktion.

Surjektivität  
von  $u$

Wenn jede Zahl auf der Nutzenskala vom kleinsten bis zum größten Nutzenwert der Nutzenwert einer Lotterie ist, dann können wir eine Abbildung  $I$  definieren, die die Nutzenwerte der einen Skala auf die der anderen abbildet. Dazu definieren wir zunächst  $u^{-1}(e)$  als eine Funktion,<sup>3</sup> die jedem Wert  $e$  der  $u$ -Skala eine (von möglicherweise mehreren) Lotterien  $x$  zuordnet, für die gilt:  $u(x) = e$ . Für jede Zahl  $e$  auf der  $u$ -Skala gilt dann:

Transformation  
der  $u$ -Skala in  
die  $u'$ -Skala  
durch die  
Abbildung  $I$

$$I(e) := u'(u^{-1}(e))$$

Im folgenden zeigen wir zunächst, dass für die Funktion  $I$  eine der Erwartungsnutzeneigenschaft von  $u$  und  $u'$  analoge Eigenschaft gilt, nämlich:  $I(ak + (1 - a)m) = aI(k) + (1 - a)I(m)$  für jedes  $k$  und  $m$  auf der  $u$ -Skala. Daraus leiten wir dann das Gewünschte ab.

*Nachweis der erwartungsnutzenanalogen Eigenschaft von  $I$ :* Zunächst einmal gilt nach der Definition von  $I$  und der Erwartungsnutzeneigenschaft von  $u$ , dass:

Erwartungs-  
nutzenanaloge  
Eigenschaft  
von  $I$

$$u'(L(a, x, y)) = I(u(L(a, x, y))) = I(au(x) + (1 - a)u(y))$$

Nun gilt aber ebenso nach der Erwartungsnutzeneigenschaft von  $u'$  und wiederum nach der Definition von  $I$ , dass:

$$u'(L(a, x, y)) = au'(x) + (1 - a)u'(y) = aI(u(x)) + (1 - a)I(u(y))$$

<sup>3</sup>Bei  $u^{-1}$  handelt es sich nicht um eine Umkehrfunktion im strengen Sinne, da die Funktion  $u$  nicht umkehrbar ist, weil sie unterschiedlichen Argumenten, nämlich verschiedenen Lotterien zwischen denen Indifferenz herrscht, den gleichen Funktionswert zuordnet.

In beiden Gleichungen steht der Term  $u'(L(a, x, y))$ . Also kann man die Gleichungen zusammensetzen, und erhält:

$$I(au(x) + (1 - a)u(y)) = u'(L(a, x, y)) = aI(u(x)) + (1 - a)I(u(y))$$

Nun muss man sich nur noch folgendes klar machen: Aufgrund der zuvor bewiesenen Surjektivität von  $u$  gibt es zu jedem  $k$  und  $m$  auf der  $u$ -Skala mindestens je eine Lotterie  $x$  und eine Lotterie  $y$ , so dass  $u(x) = k$  und  $u(y) = m$ . Dann gilt aber ohne Beschränkung der Allgemeinheit für jedes  $k$  und  $m$  auf der  $u$ -Skala, dass

$$\begin{aligned} I(ak + (1 - a)m) &= I(au(x) + (1 - a)u(y)) \\ &= aI(u(x)) + (1 - a)I(u(y)) \\ &= aI(k) + (1 - a)I(m) \end{aligned}$$

was die erwartungsnutzenanaloge Eigenschaft von  $I$  ist, die nachgewiesen werden sollte.

positiv lineare  
Transformier-  
barkeit von  $u$   
in  $u'$

Mit diesem Wissen können wir folgende Rechnung aufstellen:

$$\begin{aligned} u'(x) &= I(u(x)) && \text{nach Definition von } I \\ &= I(u(x) \cdot 1 + (1 - u(x)) \cdot 0) && \text{etwas Algebra ;)} \\ &= u(x)I(1) + (1 - u(x))I(0) && \text{erwartungsnutzenanaloge Eigenschaft von } I \\ &= u(x)(I(1) - I(0)) + I(0) \end{aligned}$$

Wenn wir nun  $a := I(1) - I(0)$  und  $b := I(0)$  setzen, dann haben wir gezeigt, dass  $u'$  eine linear transformierte von  $u$  ist:

$$u'(x) = au(x) + b$$

Da  $I(1) > I(0)$  sein muss (wg. der Monotonieeigenschaft von  $u$  (und damit auch von  $u^{-1}$ ) und  $u'$ ), ist  $a > 0$ , so dass es sich tatsächlich um eine *positive* lineare Transformation handelt. *q. e. d.*

#### 4.1.4 Die Bedeutung der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie

Was ist damit gezeigt? Wir haben gezeigt, dass sich das Erwartungsnutzenprinzip (Seite 66) und die entsprechende Entscheidungsregel für Entscheidungen unter Risiko (siehe Seite 67) aus plausiblen Voraussetzungen von der Sorte „Bevorzuge eine Lotterie mit höheren Gewinnchancen gegenüber einer mit geringeren Gewinnchancen“ logisch ableiten lässt. Oft werden diese Voraussetzungen als selbstevident angesehen, so dass eine Person, die Entscheidungen rational trifft, immer von dem Erwartungsnutzen ausgehen müsste.



Ein anderes Entscheidungsverhalten müsste dementsprechend als irrational eingestuft werden.

Interessanterweise verhalten sich die meisten Menschen in diesem Sinne aber irrational, indem sie je nach Situation, ihren Nutzen bei unsicheren Ereignissen entweder oberhalb des rechnerischen Erwartungsnutzens ansetzen („Risikofreude“) oder unterhalb („Risikoscheu“ bzw. „Risikoaversion“). Dieser Punkt kann leicht missverstanden werden, da in der ökonomischen Literatur oft behauptet wird, dass risikoscheues oder -freudiges Verhalten sehr wohl mit dem Erwartungsnutzenprinzip vereinbar ist (Osborne, 2004, S. 103), indem es sich darin niederschlägt, dass riskante Ereignisse einfach entsprechend höhere oder niedrigere Nutzenwerte zugewiesen bekommen. So würde eine risikoaverse Person den Nutzen von 1000 Euro gleich hoch veranschlagen wie den Nutzen von einer 50% Chance auf 3000 Euro. Und umgekehrt würde eine risikofreudige Person vielleicht den Nutzen von 1000 Euro so hoch veranschlagen wie den von einer 25% Chance auf 3000 Euro.<sup>4</sup> (Rechnerisch ist das weniger Geld, aber sie liebt das Risiko, so dass der Nutzen derselbe bleibt. Und es wäre ja auch eine fragwürdige Theorie, die vorschreiben wollte, welche Präferenzen jemand bezüglich eines Risikos haben darf.) Diese Art der Risikobewertung ist jedoch nur dann mit dem Erwartungsnutzenprinzip vereinbar, wenn für die risikoaverse Person Geldmengen einen ihrer Risikoscheu entsprechenden abnehmenden Grenznutzen haben (konkave Nutzenfunktion), und für die risikofreudige einen entsprechenden zunehmenden Grenznutzen (konvexe Nutzenfunktion). Das bedeutet, wenn die risikoaverse Person den Nutzen von 1000 Euro mit zwei Nutzeinheiten bewertet und den Nutzen von einer Lotterie, bei der sie mit einer 50% Chance 3000 Euro gewinnen kann, ebenfalls mit zwei Nutzeinheiten, dann ist das nur dann mit dem Erwartungsnutzenprinzip vereinbar, wenn sie 3000 Euro auch ohne Lotterie bloß mit vier Nutzeinheiten bewertet.

Nun sind aber die Präferenzen hinsichtlich eines Risikos (Risikoaversion oder Risikofreude oder Risikoneutralität) und die Präferenzen hinsichtlich einer mehr oder weniger großen Menge von irgendetwas (abnehmender, zunehmender oder gleichbleibender Grenznutzen) empirisch betrachtet zunächst einmal unterschiedliche Dinge, und es wäre sehr riskant von vornherein eine Harmonie zwischen beiden anzunehmen.<sup>5</sup> Das einzige, was man sagen kann, ist dass risikofreudiges oder risikoaverses Verhalten bezüglich irgendwelcher

Unterschied  
zwischen  
Risikoaversion  
und  
abnehmendem  
Grenznutzen

<sup>4</sup>Das Beispiel stammt von Matthias Brinkmann. Auf das Problem hat mich außer Matthias Brinkmann auch Johannes Hemker hingewiesen (Dankeschön!).

<sup>5</sup>Beiläufig bemerkt führt dies eins der Risiken abstrakter mathematischer Theoriebildung vor Augen, die oft mit einem Verlust an empirischer Information einhergeht, denn mathematisch stellt sich die Risikoaversion genauso dar wie der abnehmende Grenznutzen, nämlich durch eine konkave Nutzenkurve.

Güter oder Geldwerte noch nicht zwangsläufig Ausdruck von Irrationalität (im Sinne einer Verletzung des Erwartungsnutzenprinzips) sein muss. Es ist aber stets mit der Möglichkeit zu rechnen, dass es das ist. Bezüglich von Nutzenwerten (im Unterschied zu Gütern oder Geldwerten, die erst auf Nutzenwerte abgebildet werden müssen) ist eine Verletzung des Erwartungsnutzenprinzips aber immer irrational.

Es ist daher Vorsicht geboten, wenn man die Theorie rationaler Entscheidungen zur Erklärung von empirisch beobachtbarem Entscheidungsverhalten heranziehen will. Das allein widerspricht aber noch nicht ihrer normativen Anwendung z.B., wenn es darum geht, betriebswirtschaftliche Entscheidungen an ihr zu orientieren. Doch auch in dieser Hinsicht gibt es eine Reihe von Einwänden, die gegen die Theorie erhoben worden sind. Oft werden diese Einwände in die Form (vermeintlicher) Paradoxien gekleidet, die sich aus der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie ableiten lassen. Mit diesen Einwänden werden wir uns im folgenden Kapitel beschäftigen.

### 4.1.5 Aufgaben

1. Eine Ölfirma erwägt, an einer bestimmten Stelle in der Nordsee nach Öl zu bohren. Leider ist es keineswegs sicher, ob an der entsprechenden Stelle tatsächlich Ölvorkommen vorhanden sind. Das ist um so bedauerlicher als der Bau einer Ölplattform € 1.500.000 kostet, eine Investition, die verloren wäre, sollte dort tatsächlich kein Öl zu finden sein. Andererseits würde die Ölplattform € 30.000.000 einbringen, wenn Öl vorhanden ist. Anhand der geologischen Daten können die Fachleute der Ölfirma immerhin abschätzen, dass sich in dem fraglichen Gebiet mit 45%-iger Wahrscheinlichkeit Ölvorkommen befinden.

Um eine genauere Abschätzung zu erhalten, könnte die Firma ein Expertenteam damit beauftragen, eine Probebohrung durchzuführen. Eine Probebohrung schlägt noch einmal mit € 400.000 zu Buche. Leider bieten auch derartige Expertisen keine absolute Sicherheit. Es ist bekannt, dass in 88% der Fälle vorhandene Ölvorkommen durch die Expertise erkannt werden. Aber auch wenn kein Öl vorhanden ist, liefert eine Expertise in 3% der Fälle das falsche Ergebnis, es wäre Öl zu finden.

*Aufgabe:*

- (a) Bestimme (mit Hilfe der Bayes'schen Formel) die bedingten Wahrscheinlichkeiten, mit denen Öl vorhanden ist bzw. nicht vorhanden ist, wenn die Expertise positiv bzw. negativ ausfällt.
  - (b) Stelle den Entscheidungsbaum für das beschriebene Entscheidungsproblem auf. (Beachten Sie dabei an welcher Stelle welche bedingte Wahrscheinlichkeiten eingetragen werden müssen.)
  - (c) Löse den Entscheidungsbaum soweit auf, dass man eine Empfehlung geben kann, ob es sich für die Firma lohnt, eine Expertise in Auftrag zu geben.
2.  $L'([0.5, 0.25, 0.25], A, B, C)$  sei eine Lotterie mit *drei* Preisen A, B, C, die jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten 0.5, 0.25, 0.25 gezogen werden. Zeige, dass man diese Lotterie aus Lotterien mit ausschließlich *zwei* Preisen zusammensetzen kann (Resnik, 2000, S. 91).
  3. Erkläre: Wenn eine Nutzenfunktion die Erwartungsnutzeneigenschaft  $u(L(a, x, y)) = au(x) + (1 - a)u(y)$  hat, dann bedeutet dies, dass sie dem Nutzen einer Menge von unsicheren Ereignissen  $E_1, \dots, E_n$  mit Wahrscheinlichkeiten  $p_1, \dots, p_n$  den Erwartungsnutzen

$$EU = p_1 u(E_1) + \dots + p_n u(E_n)$$

zuordnet. (Sinn der Aufgabe: Damit wird gezeigt, dass sich die für den Zwei-Güter-Fall definierte Erwartungsnutzeneigenschaft leicht auf den  $n$ -Güter-Fall übertragen lässt.)

4. Zeige, dass bei einer zusammengesetzten Lotterie:

$$L(a, L(b, x, y), L(c, x, y))$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Gewinn  $x$  gezogen wird:  $ab + (1 - a)c$  ist, und die Wahrscheinlichkeit, dass  $y$  gezogen wird:  $1 - (ab + (1 - a)c)$  beträgt. (Damit wird gezeigt, dass die Reduzierbarkeitsbedingung (Seite 186) im Einklang mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung steht.)

5. Warum ist bei der Bedingung der höheren Gewinne (Seite 186) sowie bei den entsprechenden Corrollarien die Einschränkung  $a > 0$  notwendig? Mit anderen Worten: Wieso wäre die Bedingung für  $a = 0$  unplausibel? *Zusatzfrage:* Warum gilt beim Substitutionsgesetz (Seite 188) keine entsprechende Einschränkung mehr?
6. Das St. Petersburg-Spiel wird folgendermaßen gespielt: Es wird eine Münze geworfen. Zeigt sie Kopf, dann erhält der Spieler 2 € und das Spiel ist beendet. Andernfalls wird sie ein weiteres Mal geworfen. Zeigt sie diesmal Kopf, so erhält der Spieler 4 €. Wenn nicht wird die Münze ein weiteres Mal geworfen und bei Kopf 8 € ausgezahlt usw.
- (a) Wie groß ist der Erwartungswert des Spiels, wenn das Spiel maximal 2 Runden gespielt wird?
  - (b) Wie groß ist der Erwartungswert, wenn das Spiel maximal  $n$  Runden gespielt wird?
  - (c) Wie groß ist der Erwartungswert des Spiels, wenn es mit unbeschränkter Rundenzahl gespielt wird?

(Resnik, 2000, S. 88)

### **schwierigere Aufgabe**

7. Zeige: Jede Lotterie mit  $n$  Preisen ( $n > 2$ ) lässt sich aus Lotterien mit zwei Preisen zusammensetzen.

## 4.2 Diskussion der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie

In dieser Vorlesung soll die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie diskutiert werden und daran anknüpfend die Entscheidungstheorie zur „kausalen Entscheidungstheorie“ ausgebaut werden, d.h. zu einer Theorie von Entscheidungen, die systematisch auch diejenigen Fälle berücksichtigt, in denen die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von Ereignissen auch von der gewählten Handlungsalternative abhängt.

Bei formalen Beweisführungen wie dem Beweis aus der letzten Vorlesung, dass man zu einer beliebigen Menge von Präferenzen mit Hilfe des Konstruktionsmittels der Lotterien eine kardinale Nutzenfunktion konstruieren kann, die dem Erwartungsnutzenprinzip genügt, tut man gut daran sich Klarheit darüber zu verschaffen, was dabei inhaltlich bewiesen wurde und unter welchen Voraussetzungen es bewiesen wurde. Um diese Frage zu klären werden wir im Folgenden verschiedene Lesarten des Beweises diskutieren.

### 4.2.1 Unterschiedliche Lesarten der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie

#### NM als Beweis der Existenz kardinaler Nutzenfunktionen

Eine mögliche Lesart wäre die, dass uns die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie zeigt, dass wir immer eine kardinale Nutzenskala verwenden dürfen. In dieser Hinsicht scheint der Beweis ein ebenso verblüffendes wie zwingendes Resultat zu liefern. Verblüffend erscheint das Resultat, weil wir ja keineswegs von vornherein die Existenz von „Präferenzintervallen“ angenommen haben, wie Resnik das zu Anfang des 4. Kapitels seines Buches in wenig plausibler Weise tut (Resnik, 2000, S. 82). Vielmehr wurde für die Konstruktion der kardinalen Nutzenfunktion nach Neumann-Morgenstern zunächst nur die Existenz einer wohlgeformten Präferenzrelation vorausgesetzt, sowie die Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die als solche noch nichts darüber aussagen, wie man mit Nutzenwerten umgehen kann. Die Konstruktion der kardinalen Nutzenfunktion erfolgte dann allein durch Indifferenzvergleiche zwischen Gütern, wobei zu der Menge der Güter allerdings auch die besondere Art von gedachten Lotterien gehören muss, von der Neumann und Morgenstern in ihrer Theorie Gebrauch machen.

Allerdings ist darauf hinzuweisen, dass der Beweis nicht ausschließt, dass wir auf der Menge der Lotterien eine Nutzenfunktion konstruieren können, die nicht die Erwartungsnutzeneigenschaft hat und die sich nicht positiv li-

near in die auf dieser Menge konstruierte Nutzenfunktionen mit Erwartungsnutzeneigenschaft transformieren lässt.

Voraussetzung  
einer „reichen“  
Präferenz-  
struktur

Aber selbst, wenn sich dieses Problem noch irgendwie lösen ließe, kommt hinzu, dass die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie so voraussetzungsarm eben doch nicht ist. Wir können eine kardinale Nutzenfunktion konstruieren, aber nur wenn die Präferenzrelation „reich“ genug dafür ist, d.h. wenn ihr Gegenstandsbereich alle diejenigen Lotterien umfasst, die nicht weiter reduziert<sup>6</sup> werden können.

Lehnt man kardinale Nutzenfunktionen mit dem Argument ab, dass die Zuweisung von Nutzenwerten, die mehr ausdrücken als eine bloße Ordnungsrelation, willkürlich und empirisch nicht zu rechtfertigen ist, dann kann auch die Neuman-Morgensternsche Nutzentheorie kein überzeugendes Gegenargument liefern, denn anstelle der willkürlichen Zuweisung von Zahlenwerten werden jetzt nicht minder willkürlich Indifferenzbeziehungen zwischen einer neukonstruierten Klasse gedachter Güter (den Lotterien) und den Grundgütern angenommen. Das Rechtfertigungsproblem der kardinalen Größen ist damit nur besser „versteckt“ aber nicht gelöst worden. Nach wie vor kann man also nur in solchen Kontexten von der Existenz kardinaler Nutzenfunktionen ausgehen, in denen sich die Zuweisung von Werten auf einer Intervallskala empirisch rechtfertigen lässt. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn wir es mit Geldwerten zu tun haben *und* wenn wir Grund zu der Annahme haben, dass die Geldwerte in dem entsprechenden Kontext einen konstanten Grenznutzen haben.<sup>7</sup> Dass die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie den Bereich der Anwendbarkeit des kardinalen Nutzens nicht erweitern kann, sollte uns nicht verwundern. Es wäre im Gegenteil sehr sonderbar, wenn man das empirische Problem der Metrisierung und Messung von Präferenzen durch eine rein theoretische-mathematische Konstruktion lösen könnte.

Mögliche  
Diskrepanz  
von Geldwert  
und  
Nutzenwert

**Erwartungsnutzen statt Erwartungswert** Im Zusammenhang mit der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie wird oft eine Diskussion darüber geführt, wie sich Geldwerte zu Nutzenwerten verhalten (Resnik, 2000, S. 85ff.). Der Vorteil von Geldwerten gegenüber bloß ordinalen Nutzenwerten besteht darin, dass man mit Geldwerten rechnen kann, was mit ordinalen Nutzenwerten nur sehr begrenzt möglich ist. Das bekannte Problem, wenn wir mit Geldwerten anstatt mit Nutzenwerten rechnen, besteht darin, dass Geldwert und Nutzen einander keinesfalls immer entsprechen müssen, z.B. weil der Grenznutzen des Geldes nicht konstant ist. Zudem sind viele Entscheidungssituationen denkbar, in denen die Ergebnisse nicht sinnvoll als mo-

<sup>6</sup>Siehe die Bedingung der Reduzierbarkeit auf Seite 186.

<sup>7</sup>Vergleiche auch die Ausführungen auf Seite 193.

netäre Kosten oder Gewinne beziffert werden können. Sofern es überhaupt möglich ist eine kardinale Nutzenfunktion anzugeben, erscheint daher der Rückgriff auf Nutzenwerte anstelle von Geldwerten zunächst die sinnvollere Alternative zu sein. Dieser scheinbare Vorteil des kardinalen Nutzens gegenüber dem Geldwert wird jedoch in der Regel dadurch zunichte, dass sich kardinale Nutzenwerte sehr viel schlechter präzise messen lassen als Geldwerte. (Die theoretische Konstruktion des kardinalen Nutzens aus Lotterien, wie sie von von Neumann und Morgenstern vorgenommen wird, kann kaum eine zuverlässige Grundlage für empirische Messungen abgeben.) Zudem ist auch der kardinale Nutzen oft schlicht nicht vorhanden. Auch wenn Geldwerte unter Umständen nur lose an den Nutzen geknüpft sind, den jemand aus einem bestimmten Geldbetrag beziehen kann, ist das Rechnen mit Geldbeträgen, wo dies möglich ist, daher in der Regel die sehr viel zuverlässigere Alternative. Nicht nur aus didaktischen Gründen stützt beispielsweise Kaplan daher (anders als Resnik) den Aufbau der Entscheidungstheorie von vornherein nur auf Lotterien über Geldwerte (Kaplan, 1996). Alles in allem kann man festhalten: Welche konzeptionellen Probleme auch immer mit dem Geldwert bzw. dem erwarteten Geldwert verknüpft sind, sie können durch die Einführung von Nutzenwerten statt Geldwerten auch nicht immer befriedigender gelöst werden.

### NM als Beweis des Erwartungsnutzens

Eine weitere Lesart der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie besagt, dass die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie uns die Gültigkeit des Erwartungsnutzenprinzips auch bezogen auf Einzelfälle beweist. Sie liefert damit eine stärkere Rechtfertigung des Erwartungsnutzens als der Hinweis auf das Gesetz der großen Zahlen und empirisch-statistische Überlegungen (siehe Kapitel 1.4.2, Seite 71ff.). Auch hier gilt die Einschränkung, dass das Resultat nur unter den vorausgesetzten „Bedingungen“ (siehe Seite 185) bewiesen wurde. Anders als bei der ersten Lesart (Seite 197), die die Konstruktion kardinaler Nutzenfunktionen hervorhebt, liefert die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie bei dieser Lesart auch mit dieser Einschränkung noch ein gehaltvolles Resultat. Denn die Rechtfertigung des Erwartungsnutzenprinzips (auch für den Einzelfall) erübrigt sich keineswegs von selbst in den Kontexten, in denen wir mit Geldwerten zu tun haben oder kardinalen Nutzen annehmen dürfen. Was die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie zeigt ist, dass die Verletzung des Erwartungsnutzenprinzips nicht nur (auf lange Sicht) zu einer Minderung des Gewinns führt, sondern auch Ausdruck inkonsequenten Verhaltens ist. Der Nachweis dieser Inkonsequenz funktioniert aber nur dort, wo wir genügend „reiche“ Präferenzen annehmen dürfen. Ist das aber nicht

Verletzung des  
Erwartungs-  
nutzenprinzips  
als  
Inkonsequenz

der Fall, dann können wir gegenüber Abweichungen vom Erwartungsnutzenprinzip auch nicht mit Hinweis auf Neumann-Morgenstern den Vorwurf der Inkonsistenz erheben.<sup>8</sup>

### Der Erwartungsnutzen in der Empirie

Man kann die Entscheidungstheorie in zweierlei Weise verstehen: Als *empirische Theorie*, die mehr oder weniger genau beschreibt, wie sich Menschen in Entscheidungssituationen verhalten, und die zugleich erklärt, weshalb sie sich so entscheiden, wie sie es tun, nämlich, weil sie ihren Nutzen maximieren wollen. Oder als *normative Theorie* (im instrumentellen, nicht im moralischen Sinne<sup>9</sup>), die uns lehrt, wie wir richtige Entscheidungen treffen sollen, um einen vorgegebenen Zweck so gut wie möglich zu erreichen.

Die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie konkretisiert die Entscheidungstheorie in dem Sinne, dass sie uns zeigt, dass nutzenmaximierende Entscheidungen unter der Voraussetzung vorgegebener und genügend reicher Präferenzen dem Prinzip des Erwartungsnutzen folgen (sollten). Wenn man diese Theorie als empirisch-deskriptive Theorie auffassen will (oder größeren empirisch-deskriptiv verstandenen ökonomischen Theoriegebilden zur Grundlage geben will), dann stellt sich die Frage, ob sie menschliches Entscheidungsverhalten richtig oder falsch beschreibt.

Kahnemann  
und Tversky

Zu dieser Frage haben Daniel Kahneman und Amos Tversky eine Reihe von berühmten Experimenten durchgeführt. Eins läuft so ab: Die Probanden sollen ein Entscheidungsproblem mit folgender Hintergrundgeschichte lösen:

Sie sind Gesundheitsminister und wissen, dass eine unbekannte Grippewelle in unabsehbarer Zeit Ihr Land heimsuchen wird, die voraussichtlich 600 Menschen das Leben kosten wird. Gegen diese Krankheit sind zwei verschiedene Präventionsprogramme entwickelt worden, über deren Anwendung Sie entscheiden sollen. Ihnen werden folgende Präventionsprogramme vorgeschlagen.  
(Fritz, 2002, S. 43)

<sup>8</sup>Vergleiche dazu auch die frühere Diskussion zwischen Rawls und Harsanyi, Kapitel 1.4.4, Seite 74ff. .

<sup>9</sup>Instrumentell-normative Theorien sind Theorien, die uns sagen, wie wir ein *gegebenes Ziel* am besten erreichen können, die aber nichts darüber aussagen, ob das Ziel es wert ist verfolgt zu werden. (In der Terminologie der Moralphilosophie Immanuel Kants könnte man sagen, sie befassen sich ausschließlich mit „hypothetischen Imperativen“.) Moralisch-normative Theorien sind dagegen philosophische Theorien, die etwas darüber aussagen, welche Ziele und Zwecke im Leben wertvoll sind oder welche Handlungen man ausführen bzw. unterlassen muss unabhängig von irgendwelchen Zielen und Zwecken (deontologischer Ansatz).



Die Probanden sind bei diesem Experiment in zwei Gruppen unterteilt. Die erste Gruppe erhält folgende Information über die Wirksamkeit der Präventionsprogramme (Fritz, 2002, S. 44):

- Bei Anwendung des Präventionsprogramms A werden 200 Personen gerettet.
- Bei Anwendung von Programm B gibt es eine Wahrscheinlichkeit von  $1/3$ , dass 600 Menschen gerettet werden und eine Wahrscheinlichkeit von  $2/3$ , dass niemand gerettet wird.

Der zweiten Gruppe wird dagegen genau dieselbe Information in der folgenden Form mitgeteilt:

- Bei Anwendung des Programms C werden 400 Menschen sterben.
- Bei Anwendung des Programms D gibt es eine Wahrscheinlichkeit von  $1/3$ , dass niemand sterben muss und eine Wahrscheinlichkeit von  $2/3$ , dass 600 Menschen sterben müssen.

Nicht nur die Informationen sind für beide Gruppen dieselben, sondern auch der Erwartungsnutzen beider Programme ist derselbe, da sowohl bei Anwendung von Programm A als auch bei der Anwendung von Programm B nach dem Erwartungsnutzenprinzip der Tod von 200 Menschen zu erwarten ist. Würden sich die Probanden im Sinne der Erwartungsnutzenhypothese verhalten, dann müssten sie erstens zwischen beiden Programmen indifferent sein, d.h. bei einer hinreichend großen Zahl von Probanden müssten sich ca. 50% für Programm A (bzw. C) und 50% für Programm B (bzw. D) entscheiden. Und zweitens dürfte es insbesondere keine Unterschiede zwischen der ersten und der zweiten Gruppe von Probanden geben.

Kahneman und Tversky stellten jedoch fest, dass in der ersten Gruppe von Probanden 72% das Programm A wählten, während sich in der zweiten Gruppe nur 22% für das entsprechende Programm C entschieden. Das Erwartungsnutzenprinzip ist damit als empirische Hypothese über menschliches Entscheidungsverhalten widerlegt. Andere Experimente bestätigen diesen Befund.

Man könnte einwenden, dass von diesem Experiment die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie als empirische Theorie nicht widerlegt ist, weil in diesem Fall eine der Bedingungen ihrer Anwendbarkeit (genügend reiche Präferenzstruktur) möglicherweise nicht gegeben ist. Dennoch kommt sie durch dieses Experiment in Schwierigkeiten, denn die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie setzt mit der Reduzierbarkeitsbedingung

Empirische  
Verletzung des  
E'n-Prinzips

(siehe Seite 186) implizit voraus, dass Menschen indifferent gegenüber unterschiedlichen Repräsentationen desselben Entscheidungsproblems sind. Genau das ist aber, wie Kahnman und Tversky eindrucksvoll zeigen konnten, nicht der Fall. Vielmehr hängt das menschliche Entscheidungsverhalten – wie es übrigens auch die Alltagserfahrung nahelegt – sehr wesentlich davon ab, wie ein Entscheidungsproblem dargestellt wird („Framing-Effekt“).

„Framing“-  
Effekt

Es ist denkbar, dass das Experiment anders ausgefallen wäre, wenn man auf Probanden zurückgegriffen hätte, die zuvor in der Entscheidungstheorie instruiert worden sind. Aber dann hieße das immer noch, dass die Entscheidungstheorie empirisch-deskriptiv nur solche Entscheidungssituationen richtig erfasst, in denen „professionelle“ Entscheider die Entscheidungen treffen, nicht aber generell alle Entscheidungssituationen.

Grenzen der  
empirischen  
Anwendbarkeit

### NM als Rationalitätskriterium

Wenn man die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie weniger als empirisch-deskriptive denn als normative Theorie liest, dann besagt sie, dass man, will man rationale Entscheidungen treffen, sich bei Entscheidungen unter Risiko an das Erwartungsnutzenprinzip halten sollte. Rationalität wird dabei wie immer in diesem Zusammenhang im Sinne der spärlichen Definition David Humes als „die Fähigkeit zu gegebenen Zwecken die geeigneten Mittel zu finden“ verstanden. Dieser Rationalitätsbegriff ist nicht zu verwechseln mit dem in der kontinentalen Tradition üblichen, vor allem durch Kant geprägten umfassenden Vernunftbegriff, der auch eine Fähigkeit der Vernunft zur Erkenntnis des moralisch Richtigen unterstellt.

Aber auch im Sinne der rein instrumentell verstandenen Rationalität ist die Frage zu stellen, ob rationale Entscheidungen stets dem Prinzip der Erwartungsnutzens gehorchen müssen. In dieser Hinsicht ist es wichtig, sich darüber im Klaren zu sein, dass die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie lediglich zeigt, dass *wenn* genügend reichhaltige und wohlgeformte Präferenzen vorhanden sind, rationale Entscheidungen nach Maßgabe des Erwartungsnutzens getroffen werden müssen. Was sie aber *nicht* beweist und auch nicht beweisen kann ist, dass man stets über eine entsprechend reiche Präferenzrelation verfügen sollte bzw. dass es, wenn man nicht darüber verfügt, rational wäre, sich gefälligst eine zuzulegen. Wenn die Konstruktion kardinaler Präferenzen nach Neumann-Morgenstern daran scheitert, dass die Präferenzen nicht reichhaltig genug sind (indem sie nicht auch alle denkbaren Lotterien einbeziehen), dann kann man nicht mit Berufung auf den Neumann-Morgensternschen Beweis den Vorwurf der Irrationalität erheben. Dieser Beweis zeigt nur, dass unter bestimmten und bestenfalls teilweise selbstverständlichen Voraussetzungen ein bestimmtes Verhalten rational ist.

Grenzen der  
normativen  
Anwendbarkeit

Er zeigt nicht, dass die Erfüllung der Voraussetzungen des Beweis selbst eine Forderung der Rationalität ist.

Nun könnte man aber fragen, ob es nicht andere Gründe dafür gibt, die Voraussetzungen für den Beweis, insbesondere die Möglichkeit der Ausdehnung der Präferenzordnung auf eine vollständige Menge von Lotterien (siehe Seite 185), als eine Forderung der Rationalität zu akzeptieren. Man könnte sich z.B. darauf berufen, dass es immer möglich sein muss, bei zwei Gütern zu entscheiden, welches man dem anderen vorzieht, oder ob man beide Güter gleich hoch schätzt. Kann man sich zwischen zwei Gütern nicht entscheiden, so bedeutet dies nichts anderes, als das man zwischen beiden Gütern indifferent ist. Also enthält die Annahme der Ausdehnbarkeit einer gegebenen Präferenzordnung auf die vollständige Menge der Lotterien über alle in der Präferenzordnung vorkommenden Güter keine ungewöhnlichen oder unzumutbaren Voraussetzungen.

Ein (noch relativ leicht ausräumbares) Problem kann jedoch dadurch entstehen, dass wir uns unter Umständen nur deshalb nicht zwischen zwei Gütern entscheiden können, weil wir nicht verstehen, was die Güter beinhalten. Wenn man diese Art von Unsicherheit oder Unentschlossenheit im Sinne des eben geführten Arguments als Indifferenz interpretiert, dann kann das zur Folge haben, dass wir Indifferenz zwischen zwei Gütern annehmen, die eindeutig unterschiedlichen Wert haben. Man könnte sich folgendes Beispiel vorstellen: Jemand wird vor die Wahl gestellt entweder einen Lottoschein auszufüllen, bei dem er eine Chance von ca. 1:14.000.000 hat, sechs Richtige zu bekommen, oder sich mit demselben Einsatz an einer Lotto-Tippgemeinschaft zu beteiligen, deren Gewinnchancen sich nach einem hochkomplizierten und kaum durchschaubaren Schema richten, das von einer kundigen Mathematikerin erfunden wurde, der die Tippgemeinschaft gehört. Angenommen unser Lotto-Spieler hat keine klare Vorstellung davon, wie gut seine Gewinnchancen bei der Beteiligung an der Tippgemeinschaft sind. Dann müssten wir nach der zuvor geführten Argumentation annehmen, dass der Spieler indifferent zwischen einem selbstausgefüllten Schein und der Tippgemeinschaft ist, auch wenn die Gewinnchancen bei der Tippgemeinschaft objektiv niedriger sind (da auch die Betreiber einer Tippgemeinschaft ja von irgendetwas leben müssen).

Indifferenz  
oder Unent-  
schlossenheit?

Das Beispiel führt auf schöne Weise vor Augen, dass Unsicherheit bzw. Unentschlossenheit eben doch nicht dasselbe ist, wie Indifferenz. Im Zusammenhang mit der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie stellt diese Art epistemischer Unsicherheit jedoch nicht unbedingt ein gravierendes Problem dar, da man allzu komplizierte Lotterien auf Grund der Reduzierbarkeit von Lotterien immer soweit umformen und vereinfachen kann, bis man die Chance für jeden in einer verschachtelten Lotterie vorkommenden Gewinn mit

einer ganz bestimmten Prozentzahl angeben kann, was verständlich genug sein dürfte.

Aber es gibt andere Beispiele, wo die Sache komplizierter wird. Nehmen wir an, jemand bekomme die Gelegenheit an einem Fußballtippspiel zur EM 2008 zu wetten, ob am 16. Juni Deutschland oder Österreich gewinnt. Gewinnt er die Wette, bekommt er € 100 Euro, sonst nichts. Nun nehmen wir weiterhin an, der wettende Fußballfan hat gute Gründe davon auszugehen, dass es wahrscheinlicher ist, dass Deutschland gewinnt, als dass Österreich gewinnt. Er wird also in jedem Fall auf Deutschland wetten. Wenn man die Wette als ein Gut betrachtet, dann stellt sich die Frage: Welche Neumann-Morgensternschen Lotterie der Form  $L(a, 100 \text{ €}, 0 \text{ €})$  ist indifferent zu dieser Wette? Das Problem besteht darin, dass jede Lotterie mit  $a > 0.5$  in Frage käme. Aber sobald wir uns für irgend eine bestimmte Lottie entscheiden, also z.B.  $a = 0.8$  dann stellen wir implizit auch die Behauptung auf, dass die Fussballwette mehr wert ist als die Lotterie mit  $a = 0.75$ , eine Bahauptung für die jedoch keine hinreichenden Gründe vorhanden sind, da unser Fussballfan nur Gründe für die vergleichsweise vage Annahme hat, dass Deutschland besser als Österreich ist, aber nicht dafür, dass Deutschlands Gewinnchancen auch mehr als 75% betragen. Man könnte versuchen, dass Problem dadurch zu lösen, dass man  $a$  marginal größer als 0.5 wählt, also  $a = 0.5 + \epsilon$ . Aber dann haben wir implizit die Behauptung aufgestellt, dass die Fussballwette weniger wert ist als die Lotterie mit  $a = 0.55$ , obwohl wir dafür ebensowenig hinreichende Gründe haben. Mark Kaplan, von dem ich dieses Argument adaptiert habe, bezeichnet die dogmatische Forderung, in jedem Fall irgendeinen bestimmten Wahrscheinlichkeitswert zuzuweisen, deshalb auch recht treffend als „*the sin of false precision*“ (Kaplan, 1996, S. 23).<sup>10</sup>

Der Fehler der  
„falschen  
Präzision“

Akzeptiert man diese Einwände, dann bedeutet das, dass die Möglichkeit die Entscheidungstheorie normativ, d.h. als Anleitung zum richtigen Entscheiden bei gegebener Zielsetzung, einzusetzen, wesentlich davon abhängt, ob bestimmte empirische Voraussetzungen gegeben sind. Zu diesen Voraussetzungen gehört, dass wir uns einigermaßen über den Wert der erzielbaren Gewinne (resp. „Ereignisse“ oder „Güter“) im Klaren sind, und dass die vor kommenden Unsicherheiten von solcher Art sind, dass wir einigermaßen präzise Wahrscheinlichkeitswerte dafür angeben können. Dementsprechend gibt die formale Entscheidungstheorie selbst dann nicht das Modell für Rationalität oder rationales Handeln schlechthin an, wenn wir unter Rationalität allein die „instrumentelle Rationalität“ verstehen. Man kann lediglich sagen, dass die formale Entscheidungstheorie den Begriff „instrumenteller Rationa-

<sup>10</sup>Das Problem ist ähnlich wie diejenigen, die das Indifferenzprinzip aufwirft (siehe Kapitel 1.3.3, Seite 59ff.).

lität“ in denjenigen Fällen konkretisiert, in denen die Voraussetzungen für ihre Anwendbarkeit gegeben sind.

### Mögliche Auswege?

Soeben wurde noch einmal verdeutlicht, dass die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie ihr Resultat (Existenz einer kardinalen Nutzenfunktion, die dem Erwartungsnutzenprinzip gehorcht) nicht bloß aus selbstverständlichen Voraussetzungen ableitet von der Art, dass man Lotterien mit höheren Gewinnen oder besseren Gewinnchancen bevorzugen soll, sondern dass sie auch von recht anspruchsvollen empirischen Voraussetzungen abhängt. Diese Feststellung ist insofern ernüchternd, als damit der Anwendungsbereich der entsprechenden Entscheidungstheorie doch empfindlich eingeschränkt wird, was umso bedauerlicher ist als die Techniken der formalen Entscheidungstheorie dort, wo man sie anwenden kann, sehr leistungsfähig sind.

Will man den Anwendungsbereich der Entscheidungstheorie ausweiten, so kann man versuchen, die Entscheidungstheorie auf weniger anspruchsvolle Voraussetzungen zu gründen. Wenn es gelingt ähnlich starke Resultate aus vergleichsweise schwächeren Voraussetzungen abzuleiten, dann wäre das in jeder Hinsicht ein Gewinn für die Entscheidungstheorie. In der Tat ist ein großer Teil der wissenschaftlichen Diskussion der Konstruktion von Erweiterungen und Alternativen gewidmet, die geeignet sind, ihren Anwendungsbereich auszuweiten. Hier soll nur an einem Einzelbeispiel angedeutet werden, wie das funktionieren kann. Das Beispiel betrifft nicht die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie im Speziellen, sondern den Präferenzbegriff als Grundlage der Entscheidungstheorie.

Wir erinnern uns, dass eine der Bedingungen für wohlgeformte Präferenzen (siehe Seite 27) darin bestand, dass die Präferenzen *zusammenhängend* sein müssen, d.h. für jedes Paar  $x, y$  aus der Menge der möglichen Resultate einer Entscheidungssituation gilt entweder  $x \succ y$  oder  $y \succ x$  oder  $x \sim y$ . Damit ist ausgeschlossen, dass es jenseits der Indifferenz ( $\sim$ ) so etwas wie Unentschlossenheit oder Unsicherheit bei Präferenzen gibt, was im Umkehrschluss wiederum heisst, die auf diesen Präferenzbegriff gegründete Entscheidungstheorie ist überhaupt nur dort anwendbar, wo diese axiomatische Voraussetzung empirisch gegeben ist, d.h. wo keine Unentschlossenheit in dem zuvor anhand einiger Beispiele diskutierten Sinn vorkommt. Kaplan unternimmt nun einen Versuch eine Präferenzrelation zu definieren, die die Möglichkeit dieser Art von Unentschlossenheit mit einbezieht (Kaplan, 1996). Wie muss er dabei vorgehen, und was muss er dafür leisten? Damit dieses Vorhaben gelingt, muss zweierlei geleistet werden: Zunächst muss ein Axiomensystem aufgestellt werden, in dem in irgendeiner Form auch so etwas wie „Untent-

Eine  
alternative  
Entscheidungs-  
theorie

geschlossenheit“ enthalten ist. Dann muss gezeigt werden, dass man auch aus diesem Axiomensystem möglichst gehaltvolle Gesetze einer Entscheidungstheorie ableiten kann. Wir werden auf die Einzelheiten von Kaplans Konstruktion nicht eingehen, sondern nur zeigen, wie er das *Zusammenhangsaxiom*, das wohlgeformte Präferenzen erfüllen müssen, so abwandelt, dass es auch einen gewissen Grad von Unentschlossenheit zulässt. Kaplan baut seine Entscheidungstheorie etwas anders auf als Resnik, indem er – teils aus didaktischen Gründen und der Anschaulichkeit und Einfachheit halber – von vornherein von der Zuweisung von Geldwerten zu bestimmten Ergebnissen (die er „well mannered states of affairs“ nennt) ausgeht, aber dieses Detail ist in unserem Zusammenhang nicht wesentlich. Er definiert den „moderaten Zusammenhang“ von Präferenzen nun folgendermaßen:

„moderater“  
Zusammen-  
hang

*Moderater Zusammenhang* (vgl. (Kaplan, 1996, S. 13)): Die Präferenzen sind charakterisiert durch eine nicht leere Menge von Zuweisungen von Geldwerten zu *allen* Ergebnissen, wobei gilt:

1. Es herrscht Indifferenz zwischen  $A$  und  $B$  ( $A \sim B$ ), wenn jede der Zuweisungen  $A$  denselben Wert zuweist wie  $B$ .
2.  $A$  wird  $B$  vorgezogen ( $A \succ B$ ), wenn keine der Zuweisungen  $B$  einen größeren Wert zuweist als  $A$ , und wenn wenigstens eine der Zuweisungen  $A$  einen größeren Wert zuweist als  $B$ .

Zu Erläuterung: Die Menge der Zuweisungen ist eine Menge von Abbildungen von Geldwerten zu Gütern. Jede dieser Abbildungen entspricht dabei einer Nutzenfunktion im Sinne der orthodoxen Entscheidungstheorie, wie wir sie in dieser Vorlesung kennen gelernt haben. Diese Konstruktion kann zunächst verblüffend erscheinen. Denn wenn wir „Unentschlossenheit“ modellieren wollen, dann – so sollte man meinen – müssten wir doch eigentlich versuchen mit spärlicheren Präferenzrelationen anzusetzen, die nicht jedem Paar von Gütern bzw. Ereignissen  $A, B$  zwingend eine der Relationen  $\sim, \succ, \prec$  zuweisen. Aber darin besteht gerade der Trick: Anstatt (auf welche Weise auch immer) eine spärlichere Präferenzrelation zu konstruieren, arbeitet Kaplan mit einer Menge von einer Nutzenfunktion vergleichbaren Abbildungen („Zuweisungen“), die teilweise miteinander übereinstimmen, teilweise aber auch voneinander abweichen können. Diese Abweichungen zwischen den verschiedenen Quasi-Nutzenfunktionen erlauben es, so etwas wie Unentschlossenheit zu erfassen. Wollte man etwa die Präferenzen des Fussballfans erfassen, der überzeugt ist, dass Deutschland größere Gewinnchancen hat als Österreich, aber unentschlossen ist, wenn es darum geht, um wieviel die Gewinnchancen Deutschlands größer sind als die Österreichs, dann würde seine Menge der

Zuweisungen alle solchen Zuweisungen enthalten, die der Fussballwette einen mindestens gleichgroßen Wert zuweisen, wie der Lotterie  $L(0.5, 100 \text{ €}, 0 \text{ €})$ . Damit gilt nach dem Axiom des „moderaten Zusammenhangs“, dass die Fußballwette der Lotterie  $L(0.5, 100 \text{ €}, 0 \text{ €})$  vorgezogen wird, was zum Ausdruck bringt, dass unser Fussballfan einen Gewinn seiner Wette für wahrscheinlicher hält als einen Verlust. Zugleich gilt aber auch, dass die Fussballwette zu keiner bestimmten Lotterie indifferent ist, was eben die Unsicherheit des Fans bezüglich der Frage zum Ausdruck bringt, um wieviel die Gewinnchancen größer als die Verlustchancen sind.

Wie Kaplan aus seinem Axiomensystem eine gehaltvolle Entscheidungstheorie ableitet, kann hier nicht mehr ausgeführt werden. Soviel sollte jedoch deutlich geworden sein, dass man dem Problem der eingeschränkten Anwendbarkeit bis zu einem gewissen Grade durch andere, möglicherweise liberalere Axiomatisierungen der Entscheidungstheorie begegnen kann. Allerdings bleibt auch bei alternativen Axiomatisierungen die Anwendbarkeit der Entscheidungstheorie immer auf diejenigen empirischen Entscheidungssituationen begrenzt, in denen wir die Gültigkeit der Axiome voraussetzen können. Es gibt keine Entscheidungstheorie, die schlechterdings alle Entscheidungssituationen erfassen könnte, so wie z.B. in den Naturwissenschaften die Kinematik *alle* Bewegungen von Körpern im Raum erfassen kann. Es ist überhaupt einer der Unterschiede von Natur- und Gesellschaftswissenschaften, dass die formalen Theorien in den letzteren immer nur einer mehr oder weniger begrenzten Reichweite haben, was vermutlich in der Natur des Gegenstandes liegt.

#### 4.2.2 „Paradoxien“ der Nutzentheorie

Wie wir eben gesehen haben, gibt es eine Reihe ernst zu nehmender Einwände gegen Entscheidungs- und Nutzentheorie, die jedoch nicht dazu führen, dass diese Theorie gänzlich verworfen werden müsste, die es aber sehr wohl erlauben ihren – manchmal uneingestanden – Voraussetzungsreichtum herauszuarbeiten und ihren Anwendungsbereich auf diejenigen Entscheidungsprobleme einzuschränken, zu deren Behandlung sie sich tatsächlich eignet. Viel häufiger als derartige Einwände wird in der Fachliteratur im Zusammenhang mit der Nutzen- und Entscheidungstheorie eine Reihe sogenannter Paradoxien diskutiert. Eine Paradoxie im strengen Sinne ist eine Aussage, aus deren Wahrheit ihre Falschheit folgt, und aus deren Falschheit wiederum ihre Wahrheit folgt (wie z.B. das berühmte Lügnerparadox, das entsteht, wenn ein Athener sagt: „Alle Athener lügen“). (Ein Paradox ist damit zu unterscheiden von einem einfachen logischen Widerspruch, der nur zur Folge hat, dass eine Theorie oder eine Aussage falsch ist. Wenn z.B. aus der Wahrheit

Definition:  
„Entscheidungsparadox“

einer Aussage ihre Falschheit folge, aus ihrer Falschheit aber wieder nur ihre Falschheit, dann handelt es sich um eine logisch falsche Aussage, aber nicht um ein Paradox.) Ein Entscheidungsparadox ist eine Entscheidungssituation, in der man mit gleichem Recht widersprüchliche Entscheidungen fordern muss. Eine Entscheidungstheorie, die solche Paradoxien zulässt, hat, wie sich versteht, ein ernstes Problem. Fast alle der im Folgenden diskutierten (vermeintlichen) Paradoxien lassen sich jedoch auflösen. Sie beruhen zum größten Teil auf mehr oder weniger gewollten Missverständnissen der Entscheidungs- und Nutzentheorie. Als Einwände gegen die Neumann-Morgensternsche Nutzentheorie wiegen sie, meiner Meinung nach, daher sehr viel weniger schwer als die zuvor erörterten Argumente. Ihre Diskussion kann aber ebenso wie die Diskussion von Beispielen dabei helfen, die Entscheidungstheorie besser zu verstehen. Zudem verdeutlichen sie Grenzen der Entscheidungstheorie und mögliche Fallstricke bei ihrer Anwendung.

### Allais' Paradox

Bei Allais' Paradox werden – ähnlich wie in dem zuvor vorgestellten Experiment von Kahneman und Tversky<sup>11</sup> – zwei scheinbar unterschiedliche Entscheidungssituationen mit einander verglichen, in denen eine Person zwischen Alternativen mit unterschiedlichen Gewinnchancen wählen kann (Myerson, 2002):

#### *Situation A:*

1. Alternative: 12 Mio € mit 10% Chance und 0 € mit 90%
2. Alternative: 1 Mio € mit 11% Chance und 0 € mit 89%

#### *Situation B:*

1. Alternative: 1 Mio € sicher
2. Alternative: 12 Mio € mit 10%, 1 Mio € mit 89% und 0 € mit 1%

Viele Menschen werden sowohl in Situation A als auch in Situation B die erste Alternative bevorzugen. Dabei erhöht in Wirklichkeit die Wahl der zweiten Alternative in Situation B den Nutzen in demselben Maße gegenüber der ersten Alternative wie die Wahl der ersten Alternative in Situation A gegenüber der zweiten. Durch die Berechnung des Erwartungswertes kann man sich leicht davon überzeugen, aber diese Feststellung gilt sogar unabhängig

<sup>11</sup>Wobei das Allais-Paradox aber nicht den „Framing“-Effekt erfassen kann!



davon wie man die Geldwerte auf Nutzenwerte abbildet, sofern man – wie es die Nutzentheorie voraussetzt – denselben Geldwerten dieselben Nutzenwerten zuordnet.

In der Tat handelt es sich hierbei aber nicht wirklich um ein Paradox, sondern nur um das empirische Phänomen, welches schon in dem eben beschriebenen Experiment von Kahneman und Tversky zu Tage getreten ist, dass Menschen sich oft nicht rational verhalten. Eine Entscheidungsregel der Art „Lieber den Spatz in der Hand als die Taube auf dem Dach“, wie sie im Alltagsleben gebräuchlich ist, widerspricht schlicht den Regeln der rationalen Entscheidungstheorie. Die Theorie gerät dadurch insofern nicht in Probleme als sie eindeutig fordert, in Situation A die erste und in Situation B die zweite Alternative zu wählen. Der Widerspruch zu alltagspraktischen Entscheidungsverhalten, das ja oft auch seine guten Gründe hat, legt freilich die Frage nahe, warum sich im Alltag Entscheidungsregeln herausgebildet haben, die zu Entscheidungen führen, die der Theorie zufolge keineswegs optimal sind. Möglicherweise existieren dafür besondere Gründe, die von der Theorie noch nicht erfasst worden sind. Denkbar ist aber auch, dass die Alltagspraxis einfach suboptimal ist oder dass in den meisten Alltagssituationen, die – wie wir gesehen haben – recht anspruchsvollen Voraussetzungen für die Anwendung der Entscheidungstheorie nicht gegeben sind, in welchem Fall gar keine Inkompatibilität zwischen Alltagspraxis und Theorie vorliegt.

**Exkurs: Eine evolutionäre Vermutung zur Erklärung vermeintlich irrationalen Entscheidungsverhaltens** Der empirische Befund, auf dem auch Allais' Paradox beruht, dass Menschen sich häufig, wenn nicht gar typischerweise nicht risikoneutral, sondern am ehesten risikoavers (manchmal auf risikofreudig) verhalten, wirft die Frage auf, warum das so ist. Sollten die Menschen nicht langfristige durch Erfolg und Misserfolg darüber belehrt worden sein, das Risikoneutralität am ehesten dazu angetan ist, den Erfolg zu maximieren? Hätte nicht schon Evolution risikoneutrales Verhalten präferieren müssen?

Samir Okasha hat unlängst folgende hypothetische Erklärung für den evolutionären Vorteil von risikoaverm Verhalten vorgeschlagen (Okasha, 2007): Wir nehmen eine Population von zwei Typen einer Spezies an, Typ A und Typ B. Von beiden Typen soll es 5 Individuen geben. Typ A geht für den Nachwuchs große Risiken ein, so dass sich mit 50%-iger Wahrscheinlichkeit die Population von Typ A auf 10 erhöhen könnte, aber mit ebenso mit 50%-iger Wahrscheinlichkeit auch auf 0 absinken könnte. Typ B ist dagegen genetisch auf ein Verhalten programmiert, dass dazu führt, dass Typ B unter normalen Bedingungen in der nächsten Generation seine Popula-

Evolutionärer  
Vorteil von  
Risikoaversion?

tionsgröße erhält, also wieder 5 Individuen stellt. Man sollte meinen, dass nach dem Erwartungsnutzenprinzip beide Typen gleich erfolgreich sind (weil  $10 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.5 = 5$ ). Samir Okasha macht nun darauf aufmerksam, dass, wenn wir statt der absoluten Bevölkerungszahl, die relativen Bevölkerungsanteile betrachten, Typ B, der kein Risiko eingeht, erfolgreicher ist, denn Typ B wird im Durchschnitt einen Bevölkerungsanteil von  $0.5 \cdot \frac{1}{3} + 0.5 \cdot 1 = \frac{2}{3}$  bekommen, während Typ A  $0.5 \cdot \frac{2}{3} + 0.5 \cdot 0 = \frac{1}{3}$  erhält.

Heisst das, dass risikoaverses Verhalten evolutionär von Vorteil ist? Das gilt höchstens vordergründig, denn wenn wir das Verhalten korrektweise auf den relativen Bevölkerungsanteil beziehen, dann zeigt sich, dass nur Typ B sich risikoneutral verhält, während Typ A risikofreudig ist. Ganz im Einklang mit der Theorie wird aber das risikoneutrale Verhalten prämiert. Das Gedankenexperiment Okashas widerspricht also nicht dem Erwartungsnutzenprinzip.

Unauflösbarkeit des „Framing“-Effekt

Nun könnte man fragen, ob dann denn nicht auch ein beobachtetes risikofreudiges Verhalten „in Wirklichkeit“ bzw. auf einer höheren Ebene dem Erwartungsnutzenprinzip entspricht, sofern man nur die evolutionäre Größe richtig identifiziert, auf die sich das Verhalten bezieht. Dazu ist zweierlei zu sagen: 1) Solange die entsprechenden Größen nicht tatsächlich empirisch identifiziert werden (können), so dass man diese Annahme überprüfen kann, muss die Theorie durch die entsprechenden empirischen Befunde als widerlegt gelten. 2) Selbst wenn dies gelingen würde, dann wäre damit noch nicht der „Framing“-Effekt erledigt, d.h. wir könnten das Ergebnis von Kahnemann und Tverskys Experiment (siehe Seite 201) zwar noch in dem Punkt mit der Theorie vereinbaren, dass der Unterschied in der Bewertung der Alternativen innerhalb jeder Vergleichsgruppe erklärt wäre, nicht aber die Diskrepanz im Verhalten zwischen den Vergleichsgruppen, die nicht mehr auf der unterschiedlichen Zusammensetzung des Erwartungswertes, sondern nur auf der unterschiedlichen Formulierung des Fallbeispiels beruht. Hierbei handelt es sich um ein genuin psychologisches Phänomen, das mit dem Erwartungsnutzenprinzip nicht mehr in Einklang zu bringen ist.

### Ellsberg Paradox

Ein anderes Paradox ist das Ellsberg Paradox. Es entsteht so: Jemand hat die Wahl zwischen zwei Arten von Glücksspielen. Bei dem ersten muss sie eine Kugel aus einer Urne ziehen, die zur Hälfte rote und zur Hälfte schwarze Kugeln enthält, wobei sie gewinnt, wenn sie eine rote Kugel zieht. Bei dem zweiten Spiel muss sie wieder aus einer Urne mit roten und schwarzen Kugeln ziehen und gewinnt wieder, wenn sie eine rote Kugel zieht. Nur weiss sie bei dem zweiten Spiel nicht wieviele rote und schwarze Kugeln die Urne enthält.

Die meisten Menschen würden in einer solchen Situation angeblich das erste Spiel mit bekannter Kugel-Verteilung vorziehen (Myerson, 2002, S. 24).<sup>12</sup> Ein „Paradox“ entsteht dann, wenn man das Indifferenzprinzip (siehe Kapitel 1.3.3) voraussetzt, das besagt, dass man bei unbekannten Wahrscheinlichkeiten eine Gleichverteilung voraussetzen soll. Akzeptiert man das Indifferenzprinzip, dann handelt es sich aber wiederum nicht um ein Paradox, sondern – sofern die Behauptung über das, was die meisten Menschen tun würden stimmt – lediglich um einen Widerspruch zwischen Theorie und Empirie, der zeigt, dass das Indifferenzprinzip empirisches beobachtbares Entscheidungsverhalten bei Entscheidungen unter Unwissenheit nicht richtig beschreibt. Lehnt man das Indifferenzprinzip überhaupt ab, so entsteht von vornherein kein Paradox.

### St. Petersburg Paradox

Das St. Petersburg Paradox setzt unbeschränkte Nutzenskalen voraus. Bei den Beweisen der in der letzten Vorlesung vorgestellten Fassung der Neumann-Morgensternschen Nutzentheorie wurde von der Voraussetzung begrenzter Nutzenskalen Gebrauch gemacht (siehe Seite 185). Man kann die Nutzentheorie jedoch auch mit unbeschränkten Nutzenskalen konstruieren, nur fallen dann die mathematischen Beweise etwas komplizierter aus.

Das St. Petersburg Paradox beruht auf dem unbeschränkten St. Petersburg Spiel, welches nachfolgenden Regeln gespielt wird: Es wird eine Münze geworfen. Zeigt sie Kopf, dann erhält der Spieler 2 € und das Spiel ist beendet. Andernfalls wird sie ein weiteres Mal geworfen. Zeigt sie diesmal Kopf, so erhält der Spieler 4 €. Wenn nicht wird die Münze ein weiteres Mal geworfen und bei Kopf 8 € ausgezahlt usw. Das Paradox besteht darin, das – rein theoretisch – ein Akteur bereit sein müsste, jeden Preis dafür zu zahlen, um an dem Spiel teilzunehmen, denn der Erwartungswert des St. Petersburgspiels berechnet sich nach:

$$EW = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot 2^n + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$$

Nun ist aber nicht wirklich einzusehen, warum das ein Problem sein sollte. In der Praxis gibt es keine unendlichen Spiele, so dass das Problem in der Praxis auch nicht auftreten kann. Was die Theorie betrifft, so bleibt

---

<sup>12</sup>Über den bedeutenden Entscheidungstheoretiker Savage geht das Gerücht um, that the author of what is perhaps the most elegant derivation of expected utility theory [...] reported after careful consideration of the problem in the light of his theory, he would still want to choose I and IV" (wie bei einem echten Gerücht ausnahmsweise mal ohne Quellenangabe ;)).

unverständlich, was man dagegen einwenden sollte, dass irgendeine Option unendlich viel wert ist, wenn man in der Theorie schon unbegrenzte und damit potentiell unendlich große Nutzenwerte zulässt.

### Das Hellseherparadox

(auch bekannt als „Newcomb’s Paradox“)

Das Hellseherparadox taucht des öfteren in philosophischen Diskussionen auf, wenn solche Fragen erörtert werden, wie die des Unterschieds zwischen Korrelation und Kausalität oder der Möglichkeit zeitlich rückwärts gerichteter Kausalität. Für die Entscheidungstheorie hat das Hellseherparadox vergleichsweise geringere Bedeutung, zumal es sich ebenso leicht wie die anderen lösen lässt. Die Geschichte zu diesem Paradox ist zunächst die folgende:

Ein Hellseher hat in einem Raum zwei Schachteln aufgestellt, eine rote und eine blaue. In die rote Schachtel legt er 1.000 €. Die blaue Schachtel ist zunächst leer. Nun wird einer der Zuschauer gebeten, den Raum zu verlassen. Wenn er wiederkehrt, wird er vor die Wahl gestellt entweder nur die blaue oder beide Schachteln zu nehmen. Er bekommt dann den Inhalt derjenigen Schachteln, die er genommen hat. Damit das ganze interessanter wird, erklärt ihm der Hellseher, dass er inzwischen vorhersagen wird, welche Entscheidung der Zuschauer treffen wird, und dass er, wenn er vorhersagt, dass der Zuschauer nur die blaue Schachtel nimmt, 1.000.000 € in die blaue Schachtel legen wird. Dem Zuschauer ist bekannt, dass der Vorhersager bisher in 90% der Fälle richtig vorhersagt hat. Welche Schachtel sollte der Zuschauer wählen? (Resnik, 2000, S. 109)

Das Paradox entsteht nun dadurch, dass man mit Hilfe der Entscheidungstheorie scheinbar genauso gut die eine wie die andere Lösung rechtfertigen kann.

1. *Rechtfertigung der Wahl beider Schachteln*: Da der Hellseher seine Vorhersage abgibt, bevor der Zuschauer eine Wahl trifft, sind die möglichen Zustände (blaue Schachtel ist leer oder blaue Schachtel ist nicht leer) unabhängig von der Wahl des Zuschauers. Als Tabelle dargestellt sieht das Entscheidungsproblem wie unten abgebildet aus, wobei die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Ereignisse unbekannt sind, aber wegen der Unabhängigkeit von den Handlungen dieselben sind:

	blaue Schachtel leer	nicht leer
Nimm blaue Schachtel	0 €	1M €
Nimm beide Schachteln	1.000 €	1M + 1.000 €

Wie man sieht, ist die Handlung beide Schachteln zu nehmen streng dominant, d.h. sie liefert, welches Ereignis auch immer eintritt, stets das bessere Ergebnis. Also sollte der Zuschauer in jedem Fall beide Schachteln nehmen.

2. *Rechtfertigung der Wahl der blauen Schachtel:* Der Hellseher verfügt offenbar tatsächlich über die Gabe des Hellsehens, sonst würde er nicht zu 90% richtig vorhersagen. Also variiert Wahrscheinlichkeit, mit der die blaue Schachtel leer ist oder nicht, mit der Wahl, die der Zuschauer trifft. Die Entscheidungstabelle müsste korrekterweise so dargestellt werden:

	blaue Schachtel leer	nicht leer
Nimm blaue Schachtel	0 € (p=0.1)	1M € (p=0.9)
Nimm beide Schachteln	1.000 € (p=0.9)	1M + 1.000 € (p=0.1)

Da es sich um eine Entscheidung unter Risiko handelt, bei der das Erwartungsnutzenprinzip gilt, ist unser Zuschauer gut beraten, wenn er nur die blaue Schachtel nimmt.

Handelt es sich hierbei tatsächlich um ein Paradox und leidet die Entscheidungstheorie an Antinomien, d.h. an inneren Widersprüchen? Wie bei so vielen philosophischen Antinomien<sup>13</sup> entsteht der Schein eines Widerspruchs nur dadurch, dass bei beiden Argumentationen jeweils von unterschiedlichen Voraussetzungen ausgegangen wird. In Wirklichkeit handelt es sich nämlich gar nicht um einen Widerspruch, sondern darum, dass in dem einen wie in dem anderen Fall aus unterschiedlichen Voraussetzungen Unterschiedliches abgeleitet wird. Bei der ersten Rechtfertigung wird vorausgesetzt, dass Hellseherei nicht möglich ist. Bei der zweiten dagegen, dass sie möglich ist. Die beiden Argumentationen kommen also deshalb zu unterschiedlichen Ergebnissen, weil sie von unterschiedlichen Problemspezifikationen ausgehen. Dass die Entscheidungstheorie bei unterschiedlichen und einander widersprechenden Problemspezifikationen unterschiedliche Lösungen liefert ist nur natürlich und verweist nicht auf einen Widerspruch innerhalb der Entscheidungstheorie.

Berück-  
sichtigung der  
Problem-  
spezifikation

<sup>13</sup>Die berühmten Antinomien aus Kants „Kritik der reinen Vernunft“ sind dafür das paradigmatische Beispiel, leider auch hinsichtlich der Tatsache wie ein mangelndes Verständnis der logischen Situation zu philosophischen Irrtümern führen kann.

### 4.2.3 Aufgaben

1. Betrachte folgende beiden Entscheidungssituationen:

*Situation A:*

- (a) Alternative: 12 Mio € mit 10% Chance und 0 € mit 90%
- (b) Alternative: 1 Mio € mit 11% Chance und 0 € mit 89%

*Situation B:*

- (a) Alternative: 1 Mio € sicher
- (b) Alternative: 12 Mio € mit 10%, 1 Mio € mit 89% und 0 € mit 1%

- (a) Berechne für beide Situationen den monetären Erwartungswert jeder Alternative
  - (b) Zeige: Auch wenn man den Nutzen nicht mit dem Geldwert gleichsetzt, sondern beispielsweise einen abnehmenden Grenznutzen des Geldes annimmt, ist die Nutzendifferenz von Alternative 1 und 2 in Situation A dieselbe wie die von Alternative 2 und 1 in Situation B.
2. Ein Spieler wird vor die Wahl gestellt, entweder auf einen Münzwurf mit einer gleichmäßigen Münze zu wetten (A), oder auf einen Münzwurf zu wetten, bei dem die Münze manipuliert ist, so dass sie häufiger auf einer der beiden Seiten landet, ohne dass aber bekannt ist, auf welcher (B). (Resnik, 2000, S. 109)

*Zeige:* Falls der Spieler lieber an Spiel A teilnimmt als an Spiel B, dann impliziert das, dass er bei Spiel B nicht indifferent zwischen Kopf oder Zahl sein kann, wie es das Indifferenzprinzip fordern würde.

*Ansatz:* 1. Zeige: Wenn der Spieler in Spiel A auf Kopf setzt und Spiel A Spiel B vorzieht, dann nimmt er implizit an, dass die Wahrscheinlichkeit von „Kopf“ in Spiel B kleiner als  $1/2$  ist.

2. Zeige: Wenn der Spieler in Spiel B indifferent zwischen Kopf und Zahl ist, dann impliziert dies die Annahme, dass er beiden Ergebnissen eine subjektive Wahrscheinlichkeit von 50% zuweist.

*Hilfe:* Nimm an, dass der Spieler 1 € gewinnen kann, wenn er richtig wettet und 0 € wenn er falsch wettet. Bezeichne mit  $x$  die Entscheidung bei Spiel A auf Kopf zu setzen, mit  $y$  die Entscheidung, bei Spiel B auf Kopf zu setzen und mit  $z$  die Entscheidung bei Spiel B auf Zahl zu

setzen. Wie sieht der Erwartungsnutzen (bzw. -wert)  $EU(x)$ ,  $EU(y)$  und  $EU(z)$  aus?

(Die subjektive Wahrscheinlichkeitstheorie und die Nutzentheorie dürfen dabei vorausgesetzt werden!)

(Zusatzfrage: Was besagt dieses Resultat?)

3. Quizfrage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit 6 Richtige im Lotto zu bekommen?





# Kapitel 5

## Spieltheorie

### 5.1 Spieltheorie I: Einführung

In dieser und der folgenden Woche werden wir uns mit der Spieltheorie beschäftigen. Die Spieltheorie kann man als Erweiterung der Entscheidungstheorie auffassen, indem in der Spieltheorie teils sehr ähnliche Techniken angewendet werden wie in der Entscheidungstheorie. So kann man „Spiele“ als Spielbäume oder Tabellen analog zu den Entscheidungsbäumen und -tabellen der Entscheidungstheorie darstellen. Umgekehrt kann man die Entscheidungstheorie als Spezialfall der Spieltheorie verstehen. Ein Entscheidungsproblem ist dann einfach ein Spiel, bei dem einer der Spieler die Natur ist.

Das wesentliche unterscheidende Merkmal der Spieltheorie gegenüber der Entscheidungstheorie besteht darin, dass sich in der Spieltheorie die Spieler strategisch aufeinander beziehen, d.h. die Spieler machen die Wahl der Strategie, die sie spielen, davon abhängig, welche Strategien die Mitspieler wählen bzw. von welchen Strategien sie erwarten, dass sie von ihren Mitspielern gewählt werden. Eine ansatzweise ähnlich Situation gibt es in der Entscheidungstheorie nur bei der „kausalen Entscheidungstheorie“, wenn die Wahrscheinlichkeit des Eintretens der Zufallsereignisse von der gewählten Handlungsalternative abhängt.

#### 5.1.1 Was „Spiele“ im Sinne der Spieltheorie sind

Spiele im Sinne der Spieltheorie ähneln im wirklichen Leben am ehesten einfachen Brett- oder Kartenspielen, wie Mühle oder Schach oder Skat. Einer oder mehrere Spieler spielen dabei gegeneinander, wobei sie in einer Folge von Runden aus einer wohldefinierten Menge von möglichen Spielzügen entsprechend ihrer Strategie jeweils einen Zug wählen. Das Ergebnis des Spiels

(Gewinn oder Verlust bzw. die Höhe des Gewinns oder des Verlusts) hängt dabei von den Zügen aller Spieler und bei manchen Spielen zusätzlich vom Zufall (z.B. der Würfel oder Kartenverteilung) ab.

Ein Spiel im Sinne der Spieltheorie besteht dabei immer mindestens aus folgenden Komponenten:

1. Zwei oder mehrere *Spieler*. Je nachdem wie groß die Anzahl der Spieler ist, spricht man von einem 2-Personen, 3-Personen oder  $N$ -Personen Spiel.
2. Mengen möglicher Spiel-*Züge*. Für jeden Spieler gibt es dabei eine eigene Menge möglicher Züge.
3. Die Menge der möglichen *Ergebnisse* bzw. „Auszahlungen“. Das Ergebnis eines jeden Spielers hängt dabei von den Zügen des Spielers selbst und von den Zügen des Gegenübers ab.

Bei bestimmten Arten von Spielen kommen noch weitere Komponenten hinzu:

4. Eine endliche oder unendliche Anzahl von Spiel-*Runden*.

Hat ein Spiel mehrere Runden und stehen jedem Spieler in jeder Runde dieselben möglichen Züge offen, dann spricht man auch von einem *wiederholten Spiel*. Grundsätzlich kann man jedes wiederholte Spiel auch als ein komplexes einfaches Spiel auffassen. Es ist eher eine Frage der Konvenienz, ob man solche Spiele als wiederholte Spiele analysiert.

5. Eine Menge von *Strategien*. Die Strategie eines Spielers spezifiziert für jede Runde und jede Spielsituation (i.e. jede Folge vorhergehender Züge), welcher Zug gespielt werden soll. Ggf. kann dabei auch zwischen mehreren möglichen Zügen zufällig ausgewählt („randomisiert“) werden.

Bei einfachen Spielen bestehen die Strategien nur aus einem Zug, so dass Züge und Strategien zusammenfallen. Man kann in diesen Fällen die Ausdrücke „Zug“ und „Strategie“ auch synonym gebrauchen.

6. Eine Menge von *Zufallsereignissen*, die neben den gewählten Zügen bzw. Strategien der Spieler die Ergebnisse des Spiels für die Spieler beeinflussen.

Zufallsereignisse können dabei so modelliert werden, dass ein zusätzlicher Spieler „Natur“ eingeführt wird, dessen Züge die zufälligen Ereignisse repräsentieren und der über seine Züge mit den Wahrscheinlichkeiten der Zufallsereignisse randomisiert. Es ist zu berücksichtigen, dass für die Spielerin „Natur“ keine Rationalität

vorausgesetzt werden kann. Eine alternative Art der Modellierung des Einflusses von Zufallsereignissen besteht darin, die Ergebnisse der Spieler durch Lotterien über Ergebnisse entsprechend den Wahrscheinlichkeiten der Zufallsereignisse zu ersetzen.

Es könnte an dieser Stelle die Frage auftreten, wo die für Spiele im Alltagsleben (z.B. Brettspiele oder Kartenspiele) konstitutiven *Regelwerke* in die Theorie eingehen. Solche Regelwerke werden implizit bei der Angabe der möglichen Züge und bei der Angabe der Ergebnisse berücksichtigt. Die möglichen Züge beim Sachspiel sind eben alle diejenigen Züge, die nach den Regeln für das Schachspiel erlaubt sind. Die Ergebnisse (Gewinn, Verlust, Remis) sind ebenfalls durch das Regelwerk festgelegt, d.h. umgekehrt: Indem man festlegt, wann welcher Spieler welches Ergebnis erhält, hat man automatisch die entsprechenden Regeln bezüglich Gewinn und Verlust des Spiels in der Spielspezifikation berücksichtigt. Daher bildet das Regelwerk in der Spieltheorie keine eigene Komponente der Spielspezifikation.

Ähnlich wie schon bei der Entscheidungstheorie bildet das Problem der richtigen Problemspezifikation eine keinesfalls triviale Schwierigkeit bei der Anwendung der Spieltheorie auf empirisch auftretende Beispiele von strategischer Interaktion. So wie man etwa bei der Entscheidungstheorie *alle* in Frage kommenden Handlungsalternativen *und alle* für das Ergebnis kausal relevanten Zufallsereignisse angeben muss, ist es bei der Anwendung der Spieltheorie in der Regel erforderlich alle strategischen Optionen zu kennen und anzugeben. Will man die Spieltheorie etwa auf die strategische Interaktion zwischen verfeindeten Armeen im Krieg anwenden, dann kann die Erfindung neuer Taktiken und Strategien der spieltheoretischen Kalkulation einen Strich durch die Rechnung machen. Auf derartige Probleme sei hier jedoch nur hingewiesen. Im Folgenden beschäftigen wir uns zunächst mit der „reinen“ Spieltheorie als solcher. Anwendungsbeispiele werden wir in der nächsten und in der letzten Vorlesung besprechen.

Was die Spieltheorie leisten kann, sofern es uns gelingt einen empirischen Fall strategischer Interaktion angemessen zu spezifizieren ist zweierlei:

1. Die Spieltheorie stellt eine Art standardisierte Sprache zur *Beschreibung strategischer Interaktion bereit*. Dies erleichtert die Darstellung und den Vergleich unterschiedlicher Interaktionssituationen und kann selbst in solchen Fällen von Nutzen sein, in denen sich die spieltheoretischen Lösungsverfahren als inadäquat erweisen.

Es ist jedoch zu beachten, dass die spieltheoretische Beschreibung strategischer Interaktion nicht immer möglich ist, z.B. wenn keine Klarheit über die verfügbaren strategischen Optionen besteht. Und auch wenn sie möglich ist, besteht die Gefahr, dass die spieltheoretische Beschreibung die wesentlichen Aspekte des empirischen

Problems eher verdeckt, z.B. indem die außerhalb der Wirtschaftswissenschaften oft schwierigen Probleme der Bewertung von Ergebnissen in den Auszahlungsparametern (bzw. den Nutzenwerten) „versteckt“ werden.

2. Die Spieltheorie stellt *Lösungsverfahren* für Spiele bereit. Eine Lösung im Sinne der Spieltheorie ist die Menge derjenigen Strategien, die die Spieler wählen werden bzw. wählen sollten, wenn sie ihren Nutzen maximieren wollen.

In der Empirie zeigt sich jedoch, dass das beobachtbare Spielerverhalten von der spieltheoretischen Lösung häufig stark abweicht.

### Beispiele

Am besten lässt sich das, was man in der Spieltheorie unter einem Spiel versteht, anhand von einigen Beispielen darstellen.

**Beispiel 1: Das Knobelspiel** Beim Knobeln wählen zwei Spieler gleichzeitig eines der drei Symbole *Stein*, *Schere*, *Papier*. Dabei gelten die Regeln: 1. Stein schleift Schere. 2. Schere schneidet Papier und 3. Papier wickelt Stein. Mit jeder Option kann man also ebenso gut gewinnen wie verlieren. Das Spiel sieht als Tabelle dargestellt folgendermaßen aus:

		Spaltenspieler		
		Stein	Schere	Papier
Zeilenspieler	Stein	0,0	1,-1	-1,1
	Schere	-1,1	0,0	1,-1
	Papier	1,-1	-1,1	0,0

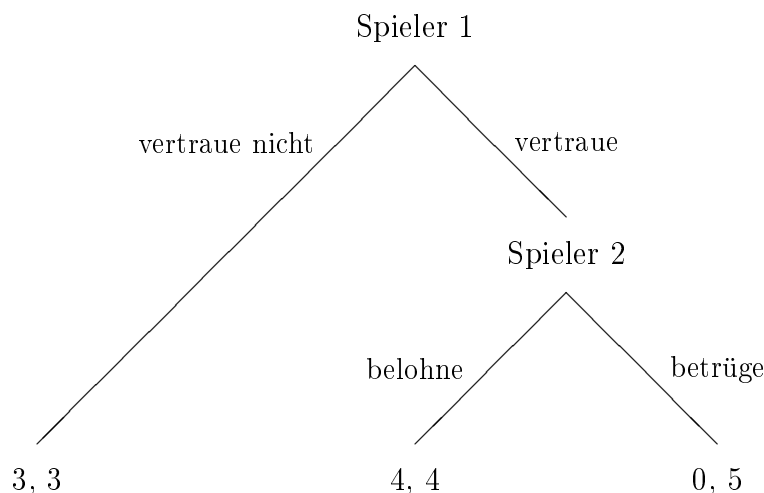
Dabei repräsentiert die erste der beiden Zahlen in jeder Zelle im inneren der Tabelle das Ergebnis des „Zeilenspielers“. Die zweite Zahl ist das Ergebnis des „Spaltenspielers“. Bei dieser Repräsentation des Spiels steht eine 1 für den Gewinn des Spiels eine -1 für den Verlust und 0 für Unentschieden.

Eine etwas einfachere Variante desselben Spiels ist das sogenannte „Passende Münzen“-Spiel („Matching Pennies“). Beim „Passende Münzen“-Spiel legen beide Spieler verdeckt eine Münze auf den Tisch. Der erste Spieler gewinnt, wenn beide Münzen Kopf oder beide Münzen Zahl zeigen. Der zweite Spieler gewinnt dagegen, wenn beide Münzen dasselbe zeigen. In Tabellenform dargestellt, sieht das Spiel folgendermaßen aus:

		Spieler 2	
		Kopf	Zahl
Spieler 1	Kopf	1,-1	-1,1
	Zahl	-1,1	1,-1

Beide Spiele (Knobeln und Passende Münzen) fallen übrigens in die Kategorie der *Nullsummenspiele*, weil der Gewinn des einen der Verlust des anderen ist.

**Beispiel 2: Vertrauensspiel** Genauso wie in der Entscheidungstheorie gibt es in der Spieltheorie neben der Tabellenform auch andere Darstellungsformen von Spielen. Besonders wenn die Spielzüge sukzessive aufeinander folgen, bietet sich oft die anschaulichere Baumdarstellung an. Ein Beispiel ist das sogenannte Vertrauensspiel, bei dem ein Spieler zunächst entscheidet, ob er einem anderen „Vertrauen“ schenkt und der andere Spieler, sofern ihm Vertrauen geschenkt wurde, entscheidet, ob er das Vertrauen belohnt oder den Vertrauenden betrügt. Das Vertrauensspiel gibt die typische Situation bei Internet-Auktionen wieder, bei denen zunächst der Käufer das Geld für den ersteigerten Gegenstand überweist und der Verkäufer anschließend den Gegenstand verschickt. Das Vertrauensspiel lässt sich sehr einfach und anschaulich als Baum darstellen:



Die erste Zahl am unteren Ende des Spielbaums gibt hier wiederum das Ergebnis für den ersten Spieler an, und die zweite Zahl das Ergebnis für den zweiten Spieler. Damit es sich um ein „Vertrauensspiel“ handelt, muss die Belohnung größer sein als das Ergebnis in dem Fall, dass kein Vertrauen geschenkt wird. Zugleich muss für den zweiten Spieler die Alternative Betrügen einen höheren Ertrag liefern als Belohnen. Nur dann nämlich ist von Spieler 1 tatsächlich Vertrauen gefragt, wenn er in Interaktion mit Spieler 2 tritt.

Das Vertrauensspiel ist ebenso wie die folgenden Spiele ein Nicht-Nullsummen-Spiel, d.h. beide Spieler können bei dem Spiel gewinnen (oder

verlieren). In diesem Fall liefert belohntes Vertrauen beiden ein besseres Ergebnis als wenn gar kein Vertrauen geschenkt wird.

**Beispiel 3: Das Hirschjagd-Spiel** Beim Hirschjagd-Spiel geht es um folgende Geschichte: Drei Jäger (es können auch zwei oder mehr als drei Jäger sein) gehen gemeinsam auf die Jagd, um einen Hirsch zu jagen. Den Hirsch können sie nur erlegen, wenn sie alle drei zusammenarbeiten. In dem Wald, wo sie den Hirsch jagen möchten, gibt es aber auch jede Menge Hasen. Einen Hasen könnte notfalls jeder alleine fangen. Nur gibt ein Hase eben einen kleineren Braten ab als ein Drittel Hirsch. Jeder Jäger steht also vor der Wahl, ob er lieber einen Hasen fängt, den er sicher hat, oder ob er, auf die anderen Jäger vertrauend, seinen Teil dazu leistet, den Hirsch zur Strecke zu bringen.

Bei drei Spielern handelt es sich bereits um ein  $N$ -Personen Spiel. Um ein solches Spiel in Tabellenform darzustellen benötigt man eigentlich eine  $N$ -Dimensionale Matrix. Man kann das Spiel aber auch durch mehrere  $N - 1$ -dimensionale Matrizen darstellen, wie im Folgenden. Jede der Matrizen stellt dabei die möglichen Ergebnisse für jeweils eine bestimmte Handlung (bzw. einen bestimmten „Zug“) von Jäger drei dar.

		<b>Jäger 2</b>		<b>Jäger 2</b>	
		Hirsch	Hase	Hirsch	Hase
<b>Jäger 1</b>	Hirsch	5, 5, 5	0, 2, 0	0, 0, 2	0, 2, 2
	Hase	2, 0, 0	2, 2, 0	2, 0, 2	2, 2, 2

**Jäger 3: Hirsch**

**Jäger 3: Hase**

Da ein Hirschbraten, auch wenn man ihn sich zu dritt teilen muss, wesentlich besser ist als ein Hasenbraten wurde dafür der Nutzenwert 5 veranschlagt. Den Wert 2 bekommt, wer einen Hasen fängt. Und 0 erhält, wer gar nichts fängt, also ein Jäger, der versucht einen Hirsch zu fangen, während sich einer oder alle anderen davon machen, um Hasen zu jagen, so dass der Hirsch entwischt. . .

**Beispiel 4: Gefangenendilemma** Es musste ja kommen: Das Gefangenendilemma. Zum Gefangenendilemma gibt es folgende Geschichte: Zwei Bankräuber werden von der Polizei aufgegriffen. Die Polizei kann ihnen jedoch nichts nachweisen. Daher stellt sie jeden der Bankräuber vor folgende Wahl: Entweder Du verrätst Deinen Komplizen, oder wir sperren Dich für vier Wochen wegen Landstreicherei ein. Wenn Du Deinen Komplizen verrätst und er Dich nicht verrät, dann kommst Du sofort frei und Dein Komplize bekommt 10 Jahre aufgebürdet. Verrät Dich Dein Komplize ebenfalls, dann kommst Du immerhin mit 5 Jahren davon, weil Du ausgesagt hast.

		Gefangener 2	
		Schweigen	Aussagen
Gefangener 1	Schweigen	4 Wochen, 4 Wochen	10 Jahre, frei
	Aussagen	frei, 10 Jahre	5 Jahre, 5 Jahre

Wenn man solche Faktoren wie die Ganovenlehre außer Acht lässt, dann werden beide Gefangenen aussagen, weil diese Strategie ihnen das relativ bessere Ergebnis liefert sowohl, wenn der andere aussagt, als auch, wenn er schweigt. Die Strategie „Schweigen“ wird von der Strategie „Aussagen“ strikt dominiert.

Das Beispiel des Gefangenendilemmas führt zugleich eine erste offensichtliche Lösungsstrategie für Spiele vor Augen, nämlich die Lösung durch *Dominanz*. Wenn man annimmt, dass die Spieler ihren Nutzen maximieren wollen, dann sollten sie auf keinen Fall eine Strategie wählen, die dominiert wird. Dominiert wird eine Strategie dann, wenn es eine Alternativ-Strategie gibt, die in mindestens einem Fall ein besseres Ergebnis liefert und in allen anderen Fällen wenigstens ein genauso gutes. Wie schon bei der Entscheidungstheorie kann man von der eben beschriebenen *schwachen* Dominanz noch die *starke* bzw. *strikte* Dominanz unterscheiden. Eine Strategie wird durch eine andere stark dominiert, wenn die andere Strategie in jedem Fall ein besseres Ergebnis liefert.

Außer davon, dass eine Strategie dominiert wird (wenn es eine eindeutig bessere gibt), kann man auch davon sprechen, dass eine Strategie dominant ist, nämlich dann, wenn sie eindeutig besser ist als alle anderen Strategien. Bei schwacher Dominanz bedeutet „eindeutig besser“ sein, dass sie im paarweisen Vergleich mit jeder anderen Strategie wenigstens in einem Fall ein besseres Ergebnis liefert als die anderen Strategien und in allen anderen Fällen ein mindestens gleich Gutes. Bei starker Dominanz ist „eindeutig besser“ so zu interpretieren, dass sie in allen Fällen besser sein muss als alle anderen Strategien.

Dabei ist zu beachten: Wenn eine Strategie durch eine andere dominiert wird, so bedeutet dies noch längst nicht, dass die andere Strategie eine dominante Strategie ist. Denn dazu müsste sie auch alle übrigen Strategien dominieren. Dazu ein Beispiel:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$Z_1$	4	4	2	6
$Z_2$	2	4	0	5
$Z_3$	3	2	1	2
$Z_4$	0	2	1	2

Bei diesem Spiel wird die Strategie  $Z_4$  durch die Strategie  $Z_3$  schwach dominiert. Trotzdem ist die Strategie  $Z_3$  keine dominante Strategie, da sie

die Strategie  $Z_2$  nicht dominiert, und zudem ihrerseits durch die Strategie  $Z_1$  stark dominiert wird. Die Strategie  $Z_1$  ist eine schwach dominante Strategie, das sie alle anderen Strategien dominiert, aber die Strategie  $Z_2$  nur schwach dominiert.

Im Gefangenendilemma ist Nicht-Kooperation mit dem Mitspieler in jedem Fall eindeutig besser als Kooperation. Also ist Nicht-Kooperation im Gefangenendilemma eine strikt dominante Strategie.

### 5.1.2 Nullsummenspiele

Nullsummenspiele sind Spiele, bei denen die Summe der Gewinne und Verluste aller Spieler immer gleich 0 ist. Das Schachspiel ist ein Nullsummenspiel, das Knobelspiel ist ebenfalls ein Nullsummenspiel. Die Tatsache, dass bei Nullsummenspielen der Gewinn des einen immer der Verlust des anderen ist, erlaubt bei 2-Personen Nullsummenspielen eine nochmals vereinfachte Darstellung: Man gibt in der Spieltabelle nicht mehr die Gewinne und Verluste der beiden Spieler durch Kommata getrennt nebeneinander an, sondern man trägt nur noch die Gewinne des Zeilenspielers ein. Die Gewinne des Spaltenspielers sind dann der entsprechende negative Wert. Man kann die Situation auch so auffassen, dass der Zeilenspieler die Werte innerhalb der Tabelle immer maximieren will, der Spaltenspieler sie aber immer minimieren will. Eine Spieltabelle könnte dann folgendermaßen aussehen:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$Z_1$	0	1	7	7
$Z_2$	4	1	2	10
$Z_3$	3	1	0	25
$Z_4$	0	0	7	10

Quelle: Resnik, Choices, S.128 (Resnik, 2000)

Dieses Spiel lässt sich nicht unmittelbar durch Dominanzüberlegungen lösen. Allerdings kann man es ebenso wie schon in der Entscheidungstheorie durch *sukzessive* Dominanz lösen. So wird die Strategie  $S_4$  des Spaltenspielers offensichtlich von allen anderen Alternativen dominiert, denn er möchte die Auszahlungen für den Zeilenspieler, die seine Verluste sind, ja möglichst minimieren. Da die Strategie  $C_4$  also nicht in Frage kommen können wir sie streichen. Ist die Strategie  $C_4$  aber erst einmal gestrichen, dann wird bezüglich der verbleibenden Möglichkeiten die Strategie  $Z_3$  dominiert (nämlich von  $Z_2$ ) und kann ebenfalls gestrichen werden usf. Als Ergebnis bleibt das



Strategiepaar  $(R_2, S_2)$  übrig (Übungsaufgabe). Dieses Strategiepaar bildet die *Lösung* des Spiels nach Dominanz. Die Auszahlung, die ein Spieler erhält, wenn beide Spieler die Lösungsstrategie spielen, wird auch der *Wert des Spiels* für den entsprechenden Spieler genannt. In diesem Beispiel ist der Wert des Spiels für den Zeilenspieler 1 und für den Spaltenspieler -1.

Allgemein hat *eine* Lösung eines Spiels immer die Form eines Tupels von Strategien, das für jeden Spieler eine Strategie erhält. Je nach Lösungsverfahren kann keine, eine oder mehrere Lösungen geben. Der Wert des Spiels kann bei mehreren Lösungen von Lösung zu Lösung variieren. In diesem Fall kann man sinnvollerweise von dem „maximalen“ oder auch „optimalen“ Wert eines Spiels für einen Spieler sprechen.

### Das Nash-Gleichgewicht

Die (sukzessive) Dominanz ist ein ebenso einfaches wie einleuchtendes Lösungsverfahren. Nur lässt es sich nicht immer anwenden. Das folgende Spiel weist keine dominierten Strategien auf, die man streichen könnte:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$Z_1$	8,-8	8,-8	7,-7
$Z_2$	0,0	10,-10	4,-4
$Z_3$	9,-9	0,0	1,-1

Quelle: Resnik, Choices, S.129 (Resnik, 2000). Aus Gründen der Anschaulichkeit wurden die entsprechenden negativen Auszahlungen für den Spaltenspieler explizit eingetragen.

Trotzdem existiert ein Strategiepaar, das man durch eine naheliegende Überlegung in besonderer Weise auszeichnen kann. Dieses Strategiepaar ist das Paar  $(Z_1, S_3)$ . Die Überlegung, die zur Auszeichnung dieses Strategiepaares führt ist die folgende: Angenommen der Zeilenspieler hätte sich (aus irgendwelchen Gründen) auf die Strategie  $Z_1$  festgelegt. Dann ist das beste, was der Spaltenspieler tun kann, die Strategie  $S_3$  zu wählen, weil er so noch am meisten bekommt (-7 anstelle von -8 bei den Alternativen  $S_1$  und  $S_2$ ). Man sagt auch, dass die Strategie  $S_3$  die *beste Antwort* auf die Strategie  $Z_1$  ist. Umgekehrt gilt: Hat der Spaltenspieler die Strategie  $S_3$  gewählt, so ist die Strategie  $Z_1$  die beste Antwort, die der Zeilenspieler wählen kann, um sein Ergebnis zu maximieren. Die Strategien  $Z_1$  und  $S_3$  sind also wechselseitig beste Antworten aufeinander. Keiner der Spieler hätte eine Motivation, im Alleingang von seiner Strategie abzuweichen. Das Strategiepaar  $(Z_1, S_3)$  bildet in diesem Sinne ein *Gleichgewicht*. Die mit diesem Gleichgewicht assoziierten Auszahlungen sind die „Gleichgewichtswerte“ des Spiels.

Diese Art von Gleichgewicht nennt bezeichnet man auch nach ihrem Erfinder als *Nash-Gleichgewicht*. Das Konzept des Nash-Gleichgewicht kann folgendermaßen motiviert werden: Wir nehmen an, dass die Spieler frei und unabhängig voneinander sind, d.h. jeder Spieler kann seine eigene Strategie wählen aber niemand kann seinen Gegenüber verpflichten eine bestimmte Strategie zu wählen. Dann werden die Spieler, wenn sie sich nutzenmaximierend verhalten, immer diejenige Strategie wählen, die eine beste Antwort auf die Strategie ihres Gegenübers bzw. auf die Strategie, die sie bei ihrem Gegenüber vermuten, ist.

Man könnte nun die Frage aufwerfen, ob sich die Spieler nicht gegebenenfalls dazu verabreden könnten, ihre Strategien gleichzeitig zu wechseln. Aber einerseits würden sie das vermutlich nur tun, wenn mindestens einer der Spieler einen Vorteil davon hat und der andere nach dem Wechsel wenigstens nicht schlechter da steht. Da im Nullsummenspiel der Vorteil des einen immer der Nachteil des anderen ist, wird ein Spieler immer gegen den solchen Wechsel sein. Bei einem Nicht-Nullsummenspiel ist ein solcher Wechsel immerhin vorstellbar, sofern es den Spielern gelingt, sich in irgendeiner Weise zu koordinieren.

Um alle Nashgleichgewichte in reinen Strategien zu bestimmen, gibt es bei endlichen Spielen eine zugegebenermaßen krude aber zugleich todsicher Methode: Man probiert einfach jedes mögliche Strategietupel durch.

Dass es auch im Nullsummenspiel mehrere Gleichgewichte geben kann, zeigt das folgende Beispiel:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$Z_1$	1,-1	2,-2	3,-3	1,-1
$Z_2$	0,0	5,-5	0,0	0,0
$Z_3$	1,-1	6,-6	4,-4	1,-1

Quelle: Resnik, Choices, S.131 (Resnik, 2000), leicht abgewandelt

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass  $(S_1, Z_1)$ ,  $(S_4, Z_1)$ ,  $(S_1, Z_3)$ ,  $(S_4, Z_3)$  Gleichgewichte sind. Auffällig ist, dass alle Gleichgewichte denselben Gleichgewichtswert haben. Dass es sich dabei nicht nur um eine Zufälligkeit handelt, sondern dass ein Gesetz dahinter steckt, beweist der folgende Satz (Vgl. Resnik (Resnik, 2000, S. 131)):

*Koordinationstheorem für Nullsummenspiele:* Seien  $(S_i, Z_m)$  und  $(S_j, Z_n)$  zwei Gleichgewichte eines Nullsummenspiels. Dann sind auch  $(S_i, Z_n)$  und  $(S_j, Z_m)$  Gleichgewichte und alle vier Gleichgewichte haben denselben Wert.

*Beweis* (nach Resnik (Resnik, 2000, S. 131)): Seien  $v_{im}, v_{jn}, v_{in}, v_{jm}$  die den entsprechenden Strategiepaaren zugeordneten Werte des Spiels für den Zeilenspieler. Da  $(S_i, Z_m)$  und  $(S_j, Z_n)$  Gleichgewichte sind, müssen  $v_{im}, v_{jn}$  jeweils minimale Werte ihrer Zeile und maximale Werte ihrer Spalte sein. Dann gilt aber auch:

1.  $v_{im} \leq v_{in}$ , da beide Werte in derselben Zeile stehen und  $v_{im}$  als Gleichgewichtswert ein minimaler Wert der Zeile sein muss.
2.  $v_{in} \leq v_{jn}$ , da beide Werte in derselben Spalte stehen und  $v_{jn}$  als Gleichgewichtswert ein maximaler Wert der Spalte sein muss.
3.  $v_{jn} \leq v_{jm}$ , da beide Werte in derselben Zeile stehen und  $v_{jn}$  als Gleichgewichtswert ein minimaler Wert der Zeile sein muss.
4.  $v_{jm} \leq v_{im}$ , da beide Werte in derselben Spalte stehen und  $v_{im}$  als Gleichgewichtswert ein maximaler Wert der Spalte sein muss.

Zusammengefasst ergibt sich daraus die Ungleichung:

$$v_{im} \leq v_{in} \leq v_{jn} \leq v_{jm} \leq v_{im}$$

Da am Ende der Ungleichungskette dieselbe Variable steht wie am Anfang gilt die Gleichheit:

$$v_{im} = v_{in} = v_{jn} = v_{jm} = v_{im}$$

Daraus lässt sich unmittelbar ableiten, dass in Nullsummenspielen alle reinen Gleichgewichte denselben Wert haben müssen.

### Gemischte Strategien und gemischte Gleichgewichte

Als reine Strategien bezeichnet man Strategien, bei denen die Auswahl der Züge eindeutig durch die Strategie festgelegt ist und nicht zufällig vorgenommen wird. Umgekehrt bezeichnet man als gemischte Strategien solche Strategien bei denen zwischen reinen Strategien randomisiert wird. (Was dasselbe ist, als wenn man sagen würde, dass innerhalb der Strategie zwischen alternativen Zügen randomisiert wird.) Ein gemischtes Gleichgewicht ist dementsprechend ein Gleichgewicht, in dem mindestens zwei gemischte Strategien vorkommen. (Bei einem 2-Personen Spiel heißt dies, dass das Gleichgewicht nur aus gemischten Strategien bestehen darf.)

Ein einfaches Beispiel für ein gemischtes Gleichgewicht liefert das „Passende Münzen“-Spiel:

		Spieler 2	
		Kopf	Zahl
Spieler 1	Kopf	1,-1	-1,1
	Zahl	-1,1	1,-1

Bei diesem Spiel hat jede reine Strategie, die ein Spieler spielt, den Erwartungswert -1. Der *Erwartungswert* einer Strategie ist diejenige Auszahlung, die ein Spieler erhält, wenn der Gegenspieler seine beste Antwort auf die Strategie spielt. (Der Erwartungswert von Strategien in der Spieltheorie ist also nicht zu verwechseln mit dem Erwartungswert in der Entscheidungstheorie!)

Wenn Spieler 1 aber mit einer 50% Wahrscheinlichkeit über beide reinen Strategien randomisiert, dann hat seine gemischte Strategie (50% Kopf, 50% Zahl) einen Erwartungswert von 0, da er – ganz gleich, welche reine oder gemischte Strategie der andere Spieler spielt – immer in der Hälfte der möglichen Fälle eine Auszahlung von 1 und in der anderen Hälfte der Fälle eine Auszahlung von -1 bekommt. Den Erwartungswert von 0 erhält Spieler 1 aber tatsächlich nur, wenn er mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5 zwischen seinen Strategien wählt. Würde er eine andere Wahrscheinlichkeit wählen, so würde sein Mitspieler diejenige Strategie wählen, die die beste Antwort auf die von Spieler 1 häufiger gewählte reine Strategie wäre. Wenn Spieler 1 also z.B. (60% Kopf, 40% Zahl) spielt, dann würde Spieler 2 am erfolgreichsten sein, wenn er immer Zahl spielte.

Wie kann man aber generell das gemischte Gleichgewicht berechnen, sofern eins vorhanden ist? Im einfachsten Fall, d.h. bei 2-Personen Spielen mit jeweils zwei Handlungsoptionen, sieht die Tabelle folgendermaßen aus:

		Spaltenspieler	
		$S_1$	$S_2$
Zeilenspieler	$Z_1$	$A_z, A_s$	$B_z, B_s$
	$Z_2$	$C_z, C_s$	$D_z, D_s$

Bei Nullsummenspielen gilt natürlich immer:  $A_z = A_s, B_z = B_s, C_z = C_s, D_z = D_s$ . Aber darauf werden wir bei der Bestimmung des gemischten Gleichgewichts nicht zurückgreifen, so dass der folgende Ansatz für alle einfachen 2-Personen Spiele mit zwei Handlungsoptionen tauglich ist.

Wie aus den Überlegungen zum „Passende Münzen“-Spiel bereits deutlich geworden ist, kann eine gemischte Strategie nur dann eine Gleichgewichtsstrategie sein, wenn der Gegenspieler indifferent ist, mit welcher seiner beiden reinen Strategien er die gemischte Strategie „beantworten“ soll. Wäre er nämlich nicht indifferent, dann würde er diejenige reine Strategie wählen, die die bessere Antwort ist. Darauf würde der erste Spieler wiederum mit einer reinen Strategie antworten können, die mindestens so gut ist wie seine gemischte

Strategie. Ein gemischtes Gleichgewicht könnte dann nur noch in dem Sonderfall vorliegen, in dem er indifferent zwischen seinen reinen und gemischten Strategien ist. (Siehe dazu die entsprechende Übungsaufgabe zur nächsten Vorlesung auf Seite 261) Im Normalfall kommt ein gemischtes Gleichgewicht im 2-Personen Spiel mit zwei Handlungsoptionen also nur in der Form vor, in der beide Spieler eine gemischte Strategie spielen.

Wenn wir also bestimmen wollen, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Zeilenspieler im gemischten Gleichgewicht über seine reinen Strategien randomisieren muss, dann müssen wir die Rechnung für Erwartungswerte des Spaltenspielers aufstellen. Die Erwartungswerte des Spaltenspielers hängen nämlich von der Wahrscheinlichkeit ab, mit der der Zeilenspieler randomisiert.

Die Erwartungswerte des Spaltenspielers bezüglich der gemischten Strategie des Zeilenspielers berechnen sich nach:

$$EW_{S1} = p \cdot A_s + (1 - p) \cdot C_s$$

$$EW_{S2} = p \cdot B_s + (1 - p) \cdot D_s$$

Da beide Werte gleich sein müssen, können wir die Gleichung aufstellen:

$$p \cdot A_s + (1 - p) \cdot C_s = p \cdot B_s + (1 - p) \cdot D_s$$

Die Lösung dieser Gleichung liefert uns das gesuchte Randomisierungsgewicht  $p$ .

Um das Randomisierungsgewicht des Spaltenspielers  $q$  zu berechnen, müssen wir umgekehrt die Erwartungswerte der reinen Strategien des Zeilenspielers bestimmen:

$$EW_{Z1} = q \cdot A_z + (1 - q) \cdot B_z$$

$$EW_{Z2} = q \cdot C_z + (1 - q) \cdot D_z$$

Daraus ergibt sich die Gleichung:

$$q \cdot A_z + (1 - q) \cdot B_z = q \cdot C_z + (1 - q) \cdot D_z$$

Sofern die beiden Gleichungen lösbar sind und für  $p$  und  $q$  bestimmte Werte zwischen 0 und 1 liefern, lautet das gemischte Gleichgewicht:

$$((p, Z_1; 1 - p, Z_2), (q, S_1; 1 - q, S_2))$$

Da bei 2-Personen Spielen mit zwei Handlungsoptionen aber klar ist, zwischen welchen Strategien randomisiert wird, würde es bereits genügen, die beiden Wahrscheinlichkeiten für den Zeilen- und Spaltenspieler  $p$  und  $q$  anzugeben, um das gemischte Gleichgewicht genau zu spezifizieren.

### 5.1.3 Aufgaben

1. Gibt es im Hirschjagdspiel (Seite 222) eine stark oder schwach dominante bzw. dominierte Strategie? (Begründe!)
2. Bestimme die Nash-Gleichgewichte im Hirschjagdspiel.
3. Im Gefangenendilemma (Seite 222) ist das Nash-Gleichgewicht Pareto-Ineffizient. Erklären Sie, wie es dazu kommt. (i.e. Worin unterscheiden sich die Überlegungen, die man zu Bestimmung des Nash-Gleichgewichts und zur Bestimmung der Pareto-Effizienten Zustände anstellt?)
4. Würde es im Gefangenendilemma den Gefangenen helfen, wenn sie miteinander kommunizieren können? (Begründe!)
5. Würde es im Hirschjagdspiel helfen, wenn die Spieler miteinander kommunizieren können? (Begründe!)
6. Löse durch sukzessive Dominanz:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$Z_1$	0	1	7	7
$Z_2$	4	1	2	10
$Z_3$	3	1	0	25
$Z_4$	0	0	7	10

Quelle: Resnik, Choices, S.128 (Resnik, 2000)

7. Löse durch sukzessive Dominanz:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$Z_1$	2	2	4	5
$Z_2$	7	1	5	3
$Z_3$	4	2	3	1
$Z_4$	2	1	0	1

Quelle: Resnik, Choices, S.129 (Resnik, 2000) (mit einer kleinen Abwandlung)

8. Bei einer Spielshow soll ein Kandidat vorhersagen, ob eine rote oder eine grüne Lampe aufleuchten wird. Sagt er richtig vorher gewinnt er €100 Euro. Der Kandidat, weiß, dass die rote Lampe mit 60% Wahrscheinlichkeit aufleuchten wird, die Grüne mit 40% Wahrscheinlichkeit. Das Spiel wird für 10 Runden wiederholt. Wie oft sollte der Kandidat „rot“ und wie oft „grün“ vorher sagen?

9. Finde ein gemischtes Gleichgewicht für das Knobelspiel (Zeige, dass es sich um ein gemischtes Gleichgewicht handelt.):

		<b>Spaltenspieler</b>		
		Stein	Schere	Papier
<b>Zeilenspieler</b>	Stein	0,0	1,-1	-1,1
	Schere	-1,1	0,0	1,-1
	Papier	1,-1	-1,1	0,0

10. Angenommen im „Passende Münzen“ Spiel spielt Spieler 2 die Strategie (70% Kopf, 30% Zahl). Welche reine oder gemischte Strategie ist die beste Antwort von Spieler 1 auf die gemischte Strategie von Spieler 2? Wie hoch ist dann der Wert des Spiels für jeden Spieler?

		<b>Spieler 2</b>	
		Kopf	Zahl
<b>Spieler 1</b>	Kopf	1,-1	-1,1
	Zahl	-1,1	1,-1

11. Bestimme das gemischte Gleichgewicht des folgenden asymmetrischen „Passende Münzen“-Spiels:

		<b>Spieler 2</b>	
		Kopf	Zahl
<b>Spieler 1</b>	Kopf	-5	10
	Zahl	20	-10

## 5.2 Spieltheorie II: Vertiefung und Anwendung

In dieser Vorlesung wird die Spieltheorie der 2-Personen Spiele vertieft werden. Da im Rahmen dieser Vorlesung nicht genug Raum für eine umfassende Darstellung der Grundlagen der Spieltheorie bleibt, wird die Spieltheorie auch diesmal nicht systematisch entwickelt, sondern über Beispiele eingeführt. Weiterhin werden am Beispiel des Gefangenendilemmas wiederholte Spiele besprochen werden. Schließlich wird, wiederum anhand von Beispielen, auf Anwendungsmöglichkeiten der Spieltheorie eingegangen werden.

### 5.2.1 Nicht-Nullsummenspiele

Bereits in der letzten Vorlesung haben wir mit dem Vertrauensspiel, dem Hirschjagdspiel und dem Gefangenendilemma Beispiele für Nicht-Nullsummenspiele besprochen. Um die Erörterung der folgenden Beispiele wenigstens etwas zu systematisieren, kann zunächst zwischen Koordinations- und Nicht-Koordinationspielen unterschieden werden. *Koordinationsspiele* sind solche Spiele, bei denen die Spieler sich bloß koordinieren müssen, um ein für sie wünschenswertes Ergebnis zu erreichen bzw. ein für alle Beteiligten nicht wünschenswertes Ergebnis zu vermeiden. Gelingt es Ihnen aber, sich zu koordinieren, dann werden sie – schon aus Eigeninteresse – bei der gewählten Lösung bleiben. Ein Beispiel für ein Koordinationsspiel ist das Hirschjagdspiel (siehe Seite 222). „Nicht-Koordinationsspiele“ wären dementsprechend alle anderen Spiele. Für uns sind dabei besonders solche Spiele von Interesse, die ein echtes *Kooperationsproblem* modellieren, wie z.B. das Gefangenendilemma. Echte Kooperationsprobleme sind, grob gesagt, solche Probleme, bei denen die für alle Beteiligten wünschenswerte Lösung kein Gleichgewicht ist, d.h. die Spieler haben einen Anreiz aus Eigeninteresse von der wünschenswerten Lösung abzuweichen. So ist die wechselseitige Kooperation im Gefangenendilemma, obwohl sie aus Sicht beider Spieler wünschenswert wäre, nicht stabil, da jeder der Spieler sich verbessern kann, wenn er selbst nicht kooperiert, vorausgesetzt der andere bleibt bei seiner Strategiewahl.

Es stellt sich die Frage, was in diesem Zusammenhang „wünschenswert“ bzw. „wünschenswerte Lösung“ heißt. Daraus könnte man nun wieder eine der philosophischen Frage machen, zu der die Meinungen weit auseinandergehen können. Immerhin gibt es aber ein recht naheliegendes *notwendiges Kriterium* für das, was eine „wünschenswerte Lösung“ ist, nämlich das aus den Wirtschaftswissenschaften bekannte Kriterium der *Pareto-Optimalität*. Im Zusammenhang der Spieltheorie ist ein Ergebnis „pareto-optimal“ wenn es kein andere Ergebnis gibt, bei dem wenigstens einer der Spieler eine höhere Auszahlung bekommt und kein anderer eine niedrigere. Dass die Pareto-



Optimalität ein sinnvolles notwendiges Kriterium für ein „wünschenswertes Ergebnis“ darstellt, wird daraus deutlich, dass ein nicht pareto-optimaler Zustand ein Zustand ist, in dem man wenigstens einen Spieler besser stellen könnte, ohne dass ein anderer Spieler schlechter gestellt werden müsste. Dann ist es aber sicher nicht „wünschenswert“ bei einem Zustand zu verbleiben, den man so leicht und ohne Nachteile in Kauf nehmen zu müssen, verbessern könnte.

Andererseits ist einzuräumen, dass man sich auch Beispiele vorstellen kann, in denen eine Gleichverteilung von Gütern unbedingt wünschenswerter ist als eine Ungleichverteilung, selbst wenn man sie gegen eine Art von Ungleichheit eintauschen könnte bei der niemand gegenüber der Gleichheit schlechter gestellt wird. In diesem Zusammenhang ist auch darauf hinzuweisen, dass das Pareto-Kriterium in erster Linie ein (kollektives) Effizienzkriterium und kein Gerechtigkeitskriterium ist. Wenn wir 100 Euro an zwei Personenn verteilen sollen und geben einer Person 1 Euro und der anderen 99 Euro, dann ist die Verteilung ebenso paretoeffizient wie diejenige, bei der beide Personen 50 Euro bekommen, obwohl die letztere von den vielen Menschen als die gerechtere beurteilt werden dürfte. Man kann noch einen Schritt weitergehen und fragen, ob es nicht besser wäre – wenn man nur eine der beiden folgenden Alternativen hat – lieber beiden 40 Euro geben und 20 Euro zum Fenster hinaus zu werfen, als zuzulassen, dass eine Person 99 Euro an sich reisst und die andere nur einen Euro bekommt. (Dies ist in nuce eins der Argumente, mit dem man die Rechtfertigung von möglicherweise ineffizienten Umverteilungsbükratien versuchen könnte.) Schließlich könnte man die Frage aufwerfen, wie man eine Situation handhaben sollte, in der 100 Euro nur in Form von 20 Euro-Scheinen verfügbar sind. Angenommen, beide Personen haben schon jeweils 40 Euro bekommen. Was soll nun mit den restlichen 20 Euro geschehen. Soll man einer Person 60 Euro geben, um einen pareto-effizienten Zustand zu schaffen und „nichts verkommen zu lassen“. Oder sollte man die restlichen 20 Euro feierlich verbrennen, um keine Ungerechtigkeiten entstehen zu lassen?

Diese Überlegungen sollen nur zeigen, dass das Kriterium der Pareto-Effizienz nicht zwingenderweise in allen Situationen ein taugliches Kriterium dafür ist, was besser oder wünschenswerter ist. Dennoch hat das Kriterium der Pareto-Effizienz im Allgemeinen eine hohe Plausibilität, weshalb wir auch im Folgenden darauf zurückgreifen werden. Es ist jedoch wichtig, sich der Grenzen bewusst zu bleiben.

### Koordinationsspiele

Koordinationsspiele sind dadurch gekennzeichnet, dass es mehrere Nash-Gleichgewichte (in reinen Strategien) gibt, von denen wenigstens eins pareto-effizient ist. Dabei können zwei Arten von Koordinationsproblemen entstehen: 1) Wenn es nur ein pareto-effizientes Gleichgewicht gibt, müssen sich die Spieler so koordinieren, dass sie das pareto-effiziente Gleichgewicht erreichen und nicht in einem anderen Gleichgewicht gefangen werden. 2) Wenn es mehrere pareto-effiziente Gleichgewichte gibt, dann müssen sich die Spieler irgendwie auf eins der Gleichgewichte einigen. Misslingt die Einigung, so kann es dazu kommen, dass sie die Gleichgewichte überhaupt verfehlen.

**Hirschjagdspiel als Koordinationsspiel** Ein Beispiel für das erste Problem ist das in der letzten Woche schon vorgestellte Hirschjagdspiel:

		<b>Jäger 2</b>		<b>Jäger 2</b>	
		Hirsch	Hase	Hirsch	Hase
12. <b>Jäger 1</b>	Hirsch	<b>5, 5, 5</b>	0, 2, 0	0, 0, 2	0, 2, 2
	Hase	2, 0, 0	2, 2, 0	2, 0, 2	<b>2, 2, 2</b>

**Jäger 3:** Hirsch

**Jäger 3:** Hase

In diesem Spiel gibt es zwei Nash-Gleichgewichte:

1. Gleichgewicht („Hirschjagdgleichgewicht“): Alle Jäger jagen den Hirsch.
2. Gleichgewicht („Hasenjagdgleichgewicht“): Alle Jäger jagen Hasen.

Dass es sich um Nash-Gleichgewichte handelt, geht aus folgender Überlegung hervor:

1. Gleichgewicht: Wenn alle Jäger den Hirsch jagen, hätte kein Jäger einen Grund als einziger einen Hasen zu jagen, weil dann sein Braten wesentlich kleiner ausfällt (Nutzenwert von zwei statt von fünf).
2. Gleichgewicht: Wenn alle Jäger Hasen jagen, hat keiner der Jäger einen Grund im Alleingang auf die Hirschjagd zu gehen, weil er alleine den Hirsch ohnehin nicht fangen kann.
3. Alle anderen Ergebnisse: In allen anderen Fällen versuchen nur einige Jäger den Hirsch zu jagen. Da kein Jäger den Hirsch ohne die Mithilfe aller fangen kann, kann ein Jäger, der vorhatte, den Hirsch zu jagen, sein Ergebnis verbessern, indem er auf die Strategie des Hasenjagens umstellt. Wenn wenigstens ein Spieler einen Anreiz hat, seine Strategie

im Alleingang zu ändern, handelt es sich nicht mehr um einen Gleichgewichtszustand. Also gibt es außer den beiden genannten Gleichgewichten kein weiteres Nash-Gleichgewicht mehr.

Das einzige paretoeffiziente Ergebnis dieses Spiels bildet das Hirschjagdgleichgewicht. Auch davon kann man sich leicht überzeugen. Denn egal welches andere Ergebnis man aus der Tabelle heranzieht, beim Hirschjagdgleichgewicht sind alle Jäger im Vergleich dazu besser gestellt (sie erhalten einen Nutzenwert von fünf anstelle von zwei oder null). Insbesondere ist auch das Hasenjagdgleichgewicht kein paretoeffizientes Ergebnis, auch wenn es eine Pareto-Verbesserung gegenüber allen anderen Ergebnissen bis auf das Hirschjagdgleichgewicht darstellt.

Das Koordinationsproblem beim Hirschjagdspiel besteht darin, dass das paretoeffiziente Hirschjagdgleichgewicht sehr viel instabiler ist als das Hasenjagdgleichgewicht. Wenn wir unter dem *Anziehungsbereich* eines Gleichgewichtes die Menge aller derjenigen Strategiekombinationen verstehen, die man durch eine endliche Anzahl von nutzenerhöhenden Strategiewechsels jeweils einzelner Jäger in das Gleichgewicht überführen kann, dann sieht man leicht, dass der Anziehungsbereich des Hasenjagdgleichgewichts wesentlich größer ist als der des Hirschjagdgleichgewichts. Zum Anziehungsbereich des Hasenjagdgleichgewichts gehören alle Strategiekombinationen bis auf das Hirschjagdgleichgewicht. Diejenigen Strategiekombinationen, bei denen mehr als ein Jäger auf Hasenjagd geht, gehören sogar ausschließlich zum Anziehungsbereich des Hasenjagdgleichgewichts. Dagegen gehören zum Anziehungsbereich des Hirschjagdgleichgewichts nur diejenigen Strategiekombinationen, bei denen höchstens ein Jäger auf Hasenjagd geht. Und selbst diese Strategiekombinationen gehören nicht ausschließlich zum Anziehungsbereich des Hirschjagdgleichgewichts, sondern ebenso auch zum Anziehungsbereich des Hasenjagdgleichgewichts. (Woran man gleichzeitig sieht, dass sich die Anziehungsbereiche der Gleichgewichte am Rand überschneiden können.)

Es ist charakteristisch für Koordinationsprobleme im Gegensatz zu den unten zu besprechenden Kooperationsproblemen, dass sie sich theoretisch allein durch Verabredungen, Signale oder Konventionen lösen lassen, ganz ohne jeden Bestrafungs- bzw. Sanktionsmechanismus. Das beliebte Schlagwort „Talk ist Cheap“ (soll heißen: Ein Versprechen zu geben kostet nichts, weil man es später sowieso brechen kann) gilt nur bei Kooperationsproblemen aber nicht bei Koordinationsproblemen.

**Widerstreitende Ziele („Clash of Wills“)** Ein vergleichsweise schwächeres Koordinationsproblem stellt das Spiel der „Widerstreitenden Ziele“ dar (welches in der älteren Literatur auch oft unter dem Titel „Kampf der

Geschlechter“ auftaucht). Hier ist die Geschichte zum Spiel: Fred und Clara wollen am Abend zusammen ausgehen. Sie telefonieren deswegen miteinander und überlegen, wo sie hingehen könnten. Fred möchte am liebsten die Oper besuchen. Clara dagegen findet die Oper ein wenig langweilig und würde es vorziehen, zu den Chippendales zu gehen. Allerdings würde sie immer noch lieber zusammen mit Fred in die Oper gehen anstatt alleine zu den Chippendales. Und umgekehrt würde auch Fred sich notfalls zu den Chippendales schleppen lassen, wenn er dadurch immerhin den Abend an Claras Seite verbringen darf. Bevor sie zu einer Einigung kommen ist leider der Akku von Freds Handy leer. Jeder von beiden überlegt für sich, wo er bzw. sie am Abend hingehen sollten, um den anderen zu treffen. Daraus ergibt sich die Spielmatrix:

		Clara	
		Oper	Chippendales
Fred	Oper	<b>2, 1</b>	0,0
	Chippendales	-1,-1	<b>1,2</b>

Wie man leicht nachprüfen kann, gibt es in diesem Spiel zwei reine Nashgleichgewichte in den Strategiekombinationen (*Oper, Oper*) und (*Chippendales, Chippendales*). Beide Nashgleichgewichte sind zudem paretoeffizient, während alle anderen reinen Strategiekombinationen paretoineffizient sind. Weiterhin existiert ein gemischtes Gleichgewicht, denn sei  $p$  die Wahrscheinlichkeit, mit der Fred am Abend in der Oper erscheint, dann bestimmt sich Claras Erwartungsnutzen für jede ihrer reinen Strategien nach:

$$\begin{aligned} EW(Clara)_{Oper} &= p \cdot 1 + (1 - p) \cdot (-1) \\ EW(Clara)_{Chippendales} &= p \cdot 0 + (1 - p) \cdot 2 \end{aligned}$$

Wenn Claras Gleichgewichtsstrategie ebenfalls eine gemischte Strategie sein soll, dann muss sie zwischen ihren reinen Strategien indifferent sein, da sie andernfalls die bessere der reinen Strategien wählen würde. Dann kann man beide Werte gleichsetzen und erhält:

$$\begin{aligned} EW(Clara)_{Oper} &= EW(Clara)_{Chippendales} \\ p \cdot 1 + (1 - p) \cdot (-1) &= p \cdot 0 + (1 - p) \cdot 2 \\ 2p - 1 &= 2 - 2p \\ p &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Freds gemischte Gleichgewichtsstrategie besteht also darin, mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p = 3/4$  zur Oper zu gehen. Da das Spiel vollkommen

symmetrisch ist, besteht Claras gemischte Gleichgewichtsstrategie darin, mit einer Wahrscheinlichkeit von  $q = 3/4$  die Chippendales zu besuchen. Der Nutzenwert für Fred und Clara im gemischten Gleichgewicht ist für beide  $1/2$ . Das gemischte Gleichgewicht ist also nicht paretoeffizient, weil beide davon profitieren würden, zu einem der reinen Gleichgewichte überzugehen. Trotzdem handelt es sich um ein Gleichgewicht, da keiner von beiden einen positiven Anreiz hat, im Alleingang von der gemischten Strategie zu einer der reinen Strategien überzugehen oder eine andere gemischte Strategie, d.h. eine mit einem anderen Wahrscheinlichkeitswert, zu wählen.

Bedeutet das nun so etwas wie, dass es für Clara und Fred auf jeden Fall besser ist, eine ihrer reinen Strategien zu wählen, als den Zufall entscheiden zu lassen? Das Koordinationsproblem wird damit nicht aus der Welt geschafft, denn keiner von beiden weiss ja, für welche reine Strategie der andere sich entscheiden wird. Wenn Clara und Fred irgendwann einmal gelernt haben, dass man bei Unwissen gemäß dem Indifferenzprinzip davon ausgehen soll, dass alle Möglichkeiten gleichverteilt sind, dann würde das nur dazu führen, dass sie genau das Falsche tun, denn wenn man die Wahrscheinlichkeit, mit der der andere jede seiner Strategien wählen wird, mit 50% veranschlagt, dann wäre es für Clara das Beste zu den Chippendales zu gehen und für Fred, die Oper aufzusuchen. Wie man sich leicht überlegen kann, ist mit dem Wissen über das – ohnehin nicht einmal paretoeffiziente – gemischte Gleichgewicht in dieser Situation ebenfalls nichts anzufangen. Setzt Clara z.B. voraus, dass Fred entsprechend seiner gemischten Gleichgewichtsstrategie randomisiert, dann ist es für sie vollkommen gleich wohin sie geht, was das Koordinationsproblem auch nicht löst.

Es würde nichts dagegen sprechen, wenn Clara und Fred eine Münze werfen, um zu entscheiden, wohin sie gehen. Nur hilft es leider nicht, wenn jeder für sich eine Münze wirft. Sie müssten es schon beide gemeinsam tun. Da sie sich der Situationsbeschreibung nach aber auf keine *koordinierte Strategie* mehr verständigen können, fällt diese Lösung aus.

Das Problem wäre womöglich weniger gravierend, wenn das Spiel nicht vollkommen symmetrisch wäre. Wenn z.B. der Nutzenwert von Fred für einen Opernbesuch deutlich höher wäre als der Nutzen, den Clara aus den Chippendales bezieht, und wenn dies beiden bekannt ist, und wenn beiden bekannt ist, dass es beiden bekannt ist, dann wäre es sicherlich für jeden von beiden naheliegend, vor der Oper zu erscheinen. Ist die Situation aber vollkommen symmetrisch, dann stellt sich das Koordinations-Problem als ein Problem des *Symmetriebruchs* dar.<sup>1</sup> Als Mechanismen zum Symmetriebruch wirken

---

<sup>1</sup>Die klassische Geschichte zum Problem des Symmetriebruchs ist die von „Buridans Esel“: Der Esel steht genau in der Mitte zwischen zwei gleich großen Heuhaufen, da er sich

häufig gesellschaftliche oder individuelle Konventionen. Zum Beispiel könnten beide sich nach dem Prinzip „Lady’s first“ jeweils dafür entscheiden, die Chippendales zu besuchen. Oder bisher hat sich Clara immer als die dominantere erwiesen, so das Fred und Clara beide davon ausgehen, dass sie sich – hätte das Telefongespräch länger gedauert – sowieso für die Chippendales entschieden.

### Nicht Koordinations-Spiele

Die Spiele, die keine Koordinationsspiele sind, bilden natürlich eine ziemlich große und disparate Gruppe. Im folgenden werden beispielhaft zwei Spiele besprochen, die vergleichsweise schärfere Dilemmata abbilden, als das bei Koordinationsspielen der Fall ist.

**Das Angsthasen-Spiel („Chicken-Game“)** Wie üblich als erstes die Geschichte zum Spiel: Beim Angsthasen-Spiel müssen die beiden „Spieler“ mit Ihren Autos mit hoher Geschwindigkeit frontal aufeinander zufahren. Wer zuerst ausweicht ist ein „Angsthase“ und hat verloren. Wenn keiner ausweicht, kommt es zum Unfall. Daraus ergibt sich die Spielmatrix:

	Ausweichen	Gas geben
Ausweichen	0, 0	-5, 5
Gas geben	5, -5	-100, -100

Das Spiel hat zwei reine Gleichgewichte nämlich (*Ausweichen*, *Gasgeben*) und (*Gasgeben*, *Ausweichen*) mit den Auszahlungen  $(-5, 5)$  und  $(5, -5)$ . Ein gemischtes Gleichgewicht existiert ebenfalls (siehe Übungsaufgabe 4).

Es ist offensichtlich, dass es für jeden Spieler im Zweifelsfall immer noch besser ist auszuweichen als Gas zu geben. Zugleich ist es aber auch besser Gas zu geben, wenn man Anlass zu der Annahme hat, dass der andere ausweicht. Daraus entstehen zwei Probleme. Das erste Problem für beide Spieler besteht darin überhaupt die Strategiekombination zu vermeiden, die zu dem Ergebnis  $(-100, -100)$  führt. Das zweite Problem besteht für jeden Spieler darin, das für ihn vorteilhaftere der beiden Gleichgewichte herbei zu führen. Anders als bei einem Koordinationsspiel lassen sich diese Problem nicht einfach durch eine Absprache lösen. Denn auch wenn jeder der Spieler verspricht auszuweichen, so ist doch zu befürchten, dass es sein Versprechen bricht im Vertrauen darauf, dass der andere seines halten wird. Bei einem Koordinationsspiel würde sich jeder Spieler schon aus Eigeninteresse an das gegebene Versprechen halten. Ein ähnliches Problem stellt sich aber auch, wenn ein

---

nicht entscheiden kann, welchen er fressen soll, verhungert der Esel.

Spieler, um den anderen zum Nachgeben zu bewegen (und damit das für ihn selbst günstigere Gleichgewicht herbei zu führen) schwört, dass er niemals nachgeben wird. Diese Drohung ist nicht glaubwürdig, sofern sie nicht mit irgendeiner Art von Selbstbindungsmechanismus verbeunden ist, die ihre Durchführung erzwingt, denn es entspricht ansonsten garnicht der Interessenlage des Spielers, die eigene Drohung wahrzumachen, sollte der Andere sie ignorieren.

**Noch einmal Gefangenendilemma** Als ein weiteres Beispiel für ein echtes Kooperationsproblem im Gegensatz zu einem bloßen Koordinationsproblem haben wir bereits in der letzten Woche das Gefangenendilemma kennen gelernt:

	Kooperieren	Defektieren
Kooperieren	3, 3	0, 5
Defektieren	5, 0	1, 1

In allgemeinerer Form kann das (symmetrische) durch die vier Parameter  $T$  („Temptation“),  $R$  („Reward“),  $P$  („Punishment“) und  $S$  („Sucker's Payoff“) definiert werden:

	Kooperieren	Defektieren
Kooperieren	R, R	S, T
Defektieren	T, S	P, P

Gefangenendilemma-Bedingung:  $T > R > P > S$

Im Gefangenendilemma existiert genau ein Nash-Gleichgewicht, nämlich die wechselseitige Defektion. Das Nash-Gleichgewicht ist aber nicht pareto-optimal, da beide Spieler besser gestellt wären, würden sie miteinander kooperieren. Das Gefangenendilemma beschreibt also eine Situation, in der individuelles nutzenmaximierendes Verhalten zu einem Zustand führt, bei dem alle am Ende schlechter gestellt sind. Gefangenendilemmasituationen treten typischerweise auf, wenn irgendwelche Ressourcen gemeinsam genutzt werden. Eine solche Resource ist, auch wenn der Ausdruck „Resource“ darauf nicht so recht passen mag, die öffentliche Ordnung und Sicherheit. Jedem leuchtet es ein, dass es am besten ist, wenn alle Menschen ehrlich sind, und niemand dem anderen etwas stiehlt. Aber am besten lebt es sich, wenn alle anderen Menschen ehrlich sind, nur man selbst sich erlauben kann, die anderen zu bestehlen. Aber wenn jeder so denkt, dann gibt es keine ehrlichen Menschen mehr. Das Problem der öffentlichen Sicherheit wird bekanntermaßen durch Sanktionsmechanismen in Form der Strafverfolgung gelöst. Ohne

irgendeine Art von Sanktionsmechanismus lässt sich das einfache Gefangenendilemma nicht lösen. Wir werden aber gleich sehen, dass es sich „lösen“ lässt,<sup>2</sup> wenn man von einfachen zu wiederholten Spielen übergeht.

### 5.2.2 Wiederholte Spiele

#### Wiederholte Spiele am Beispiel des wiederholten Gefangenendilemmas

Im einfachen Gefangenendilemma ist, wenn man davon ausgeht, dass jeder Spieler sich egoistisch-rational verhält, keine kooperative Lösung möglich. Aber wie verhält es sich, wenn man das Spiel mehrfach wiederholt? Dann können die Spieler darauf reagieren, wie sich ihr Gegenüber in der letzten Runde verhalten hat. So kann ein Spieler die Kooperation in der folgenden Runde davon abhängig machen, ob der andere in der gegenwärtigen Runde kooperiert oder nicht. Inwiefern ändert das die strategische Situation? Angenommen, es wird ein wiederholtes Gefangenendilemma von fünf Runden gespielt, und einer der Spieler spielt die Strategie „Wie Du mir, so ich Dir“ (englisch: „Tit for Tat“), d.h. er kooperiert in der ersten Runde und kooperiert in den folgenden Runden immer dann, wenn der Gegenüber in der vorhergehenden Runde ebenfalls kooperiert hat. Welches Verhalten ist die beste Antwort auf „Wie Du mir, so ich Dir“, d.h. wie kann man gegen „Wie Du mir, so ich Dir“ die höchste Auszahlung erhalten? Spielt man – analog zum einfachen Gefangenendilemma – immer unkooperativ, dann erhält man mit den Auszahlungsparametern der oben angegebenen Spielmatrix die Auszahlungen:

Runde:	1	2	3	4	5	$\Sigma$
Auszahlung:	5	1	1	1	1	9

Hätte man dagegen immer kooperativ gespielt, dann wären die Auszahlungen höher ausgefallen:

Runde:	1	2	3	4	5	$\Sigma$
Auszahlung:	3	3	3	3	3	15

Daraus wird deutlich, dass im wiederholten Gefangenendilemma unbedingte Defektion keine dominante Strategie ist. Ist aber umgekehrt eine Strategie,

---

<sup>2</sup>Strenggenommen kann man hier nicht von einer Lösung sprechen, da man lediglich von der Diskussion eines Spiels (des einfachen Gefangenendilemmas) zu der eines anderen (des wiederholten Gefangenendilemmas) übergegangen ist. Allerdings könnten sich in der Wirklichkeit auftretende Gefangenendilemma-Situationen womöglich in der Tat dadurch lösen lassen, dass man die „Spielsituation“ in geeigneterweise abändert.



die gegen „Wie Du mir so ich Dir“ immer kooperiert eine beste Antwort auf „Wie Du mir, so ich Dir“. Sie ist es zumindest dann nicht, wenn man durch irgendeine Änderung der Zugfolge ein besseres Ergebnis gegen „Wie Du mir, so ich Dir“ erzielen kann. Das ist aber in der Tat möglich, wenn man nur in der letzten Runde defektiert und bis dahin kooperiert. Dann ergibt sich:

Runde:	1	2	3	4	5	$\Sigma$
Auszahlung:	3	3	3	3	5	17

Es lohnt sich also immer, in der letzten Runde zu defektieren. Und dies gilt sogar nicht nur gegen die Strategie „Wie Du mir, so ich Dir“, sondern gegen schlechthin jede Strategie, denn auch gegen eine Strategie, die ihrerseits in der letzten Runde defektiert, ist es besser in der letzten Runde zu defektieren (und eine Auszahlung von 1 zu bekommen) als zu kooperieren (und eine Auszahlung von 0) zu erhalten. Das ist auch keineswegs verwunderlich, denn für sich betrachtet, stellt die letzte Runde ein einfaches Gefangenendilemma dar, und im einfachen Gefangenendilemma ist Defektion, wie wir gesehen haben, die dominante Strategie. Daraus ergibt sich aber eine wichtige Schlussfolgerung: Wenn in der letzten Runde Defektion die dominante Strategie ist, dann müssten beide Spieler, sofern sie sich strikt nutzenmaximierend verhalten, in der letzten Runde stets defektieren. Wenn sie aber in der letzten Runde stets defektieren, dann hat der Zug, den man in der vorletzten Runde spielt, keinen Einfluss mehr darauf, wie der Gegner in der letzten Runde antwortet (sofern der Gegner sich, wie gesagt, strikt nutzenmaximierend verhält). Mit anderen Worten man braucht in der vorletzten Runde keine Belohnung für Kooperation durch den Gegner in der folgenden Runde mehr zu erhoffen, man muss aber auch die Bestrafung für Defektion nicht mehr fürchten, da sie ohnehin eintritt. Dann befinden wir uns aber auch in der vorletzten Runde in genau derselben Situation wie in der letzten Runde, indem wir auf die zukünftige Reaktion des Gegners keine Rücksicht nehmen müssen. Dann ist es aber das beste, auch in der vorletzten Runde schon zu defektieren. Nun wiederholt sich dieselbe Überlegung auch für die vorvorletzte Runde. Auch in der vorvorletzten Runde sollte man also – wechselseitige strikte Rationalität vorausgesetzt! – defektieren usw., so dass schließlich jeder Spieler schon ab der ersten Runde defektieren müsste. Diese Art von Argumentation bei wiederholten Spielen, bei der man von der letzten Runde rückwärts auf die vorletzte schließt, und von der vorletzten auf die vorvorletzte bis man schließlich bei der ersten Runde angekommen ist, bezeichnet man auch als *Rückwärtsinduktion*.

Die Rückwärtsinduktion zeigt uns also, dass strikt-rationale Spieler auch im wiederholten Gefangenendilemma schon ab der ersten Runde defektieren werden, sofern der Gegenüber sich ebenfalls strikt rational verhält und sofern

beiden bekannt ist, dass sie sich beide strikt rational verhalten. Diese Bedingungen sind keine unwesentlichen Einschränkungen: Anders als im einfachen Gefangenendilemma ist ausschließliche Defektion keine dominante Strategie – dann wäre sie die beste Strategie, egal ob der Gegner sich rational verhält oder nicht, und unabhängig davon, was über das Verhalten des Gegners bekannt ist – sondern lediglich eine Gleichgewichtsstrategie. Gibt es auch nur geringen Anlass daran zu zweifeln, dass der Gegenspieler sich strikt rational verhält (z.B. indem er auch in der letzten Runde Kooperation noch kooperiert, wenn kein besonderer Grund dagegen spricht), dann greift das auf die Rückwärtsinduktion gestützte Argument schon nicht mehr.

Zudem setzt das Argument voraus, dass die Rundenzahl bekannt ist. Ist die Rundenzahl unbekannt (z.B. wenn das Spiel nicht durch die Anzahl der Wiederholungen, sondern durch eine Abbruchwahrscheinlichkeit nach jeder Runde begrenzt wird), so lässt sich die Argumentation ebenfalls nicht anwenden. Damit gilt aber insgesamt, dass es im wiederholten Gefangenendilemma nur im Ausnahmefall rational ist, von der ersten Runde an ausschließlich zu defektieren, nämlich dann, wenn entweder die Rundenzahl endlich und bekannt ist *und* der Gegenspieler sich strikt rational verhält *und* überdies auch seinerseits von der strikten Rationalität seines Gegenübers ausgeht, oder wenn die Gegnerstrategie zufällig eine solche ist, gegen die ausnahmslose Defektion die beste Antwort darstellt.

### Das „Volkstheorem“ („folk theorem“)

Wenn ausnahmslose Defektion im wiederholten Gefangenendilemma in aller Regel nicht die beste Strategie ist, welches ist aber dann die beste Strategie? Die Antwort lautet: Es gibt keine beste Strategie. Wie gut eine Strategie abschneidet, hängt immer davon ab, auf welchen Gegner sie trifft. Dass es keine beste Strategie gibt, lässt sich sehr leicht beweisen, indem man zeigt, dass es zwei Strategien gibt, zu denen die besten Antwort-Strategien jeweils verschieden sind. Diese beiden Strategien sind die Strategien „Falke“ und „Unerbittlich“. Die Strategie „Falke“ defektiert ausnahmslos in allen Runden. (Das Gegenstück dazu ist übrigens die Strategie „Taube“, die ausnahmslos kooperiert.) Die Strategie „Unerbittlich“ kooperiert solange, bis der Gegner ein einziges mal defektiert. Wenn das geschieht, dann defektiert sie ab der folgenden Runde ausnahmslos für den gesamten Rest des Spiels.

Nun kann man sich überlegen, dass die beste Antwort auf die Strategie „Falke“ nur eine Strategie sein kann, die gegen „Falke“ ab der ersten Runde ausnahmslos defektiert. Das bedeutet nicht, dass sie auch gegen andere Strategien ausnahmslos defektieren muss. (Sie könnte, z.B. wenn die Gegnerstrategie ein Kooperationsangebot macht, ihrerseits auf Kooperation umschwen-

ken.) Aber zumindest in der ersten Runde muss sie unbedingt defektieren, sonst würde sie in der ersten Runde gegen „Falke“ Punkte verschwenden, womit sie keine beste Antwort auf „Falke“ mehr wäre.

Gegen „Unerbittlich“ kann diese Strategie dann aber keine beste Antwort mehr sein. Denn jede beste Antwort auf „Unerbittlich“ muss gegen „Unerbittlich“ ab der ersten Runde kooperieren. Damit ist gezeigt, dass es im wiederholten Gefangenendilemma keine stark oder schwach dominante Strategie gibt.

Wie sieht es aber mit Gleichgewichtsstrategien aus? Davon gibt es einem bekannten Theorem der Spieltheorie zufolge unüberschaubar viele. Das Theorem, um das es sich handelt, ist das sogenannte Volkstheorem (englisch: „folk theorem“; „folk“, weil kein Erfinder des Theorems bekannt und es damit gewissermaßen Allgemeingut ist). Das Folk-Theorem sagt nun nicht unmittelbar etwas darüber aus, welche Strategien in wiederholten Spielen Gleichgewichtsstrategien sind, und welche nicht, aber es sagt etwas über die möglichen Durchschnittsauszahlungen von Gleichgewichten in wiederholten Spielen aus. In (vereinfachter Form) lautet das Folk-Theorem so:

*Volkstheorem:* In (unendlich oft) wiederholten Spielen ist jedes Resultat erzielbar, das den Spielern mindestens ihren *Maximin-Wert* bietet.

Dass ein Resultat „erzielbar“ ist heisst dabei, dass es ein Gleichgewicht gibt, bei dem das entsprechende Resultat heraus kommt. Unter dem „Resultat“ sind dabei die Durchschnittsauszahlungen zu verstehen, die die Spieler über das gesamte wiederholte Spiel erhalten. Der Maximin-Wert ist derjenige Wert, den ein Spieler erhält, wenn er „auf Nummer sicher“ geht und so spielt, dass er seinen Verlust minimiert. (Vgl. dazu die Maximin-Regel bei Entscheidungen unter Unwissenheit, S. 35.) Im (wiederholten) Gefangenendilemma kann ein Spieler dadurch, dass er defektiert, sicherstellen, dass er mindestens die Auszahlung für wechselseitige Defektion erhält. (Mit unseren Zahlen also einen Nutzenwert von 1.)

Der *Beweis* der Volkstheorems lässt sich für den Sonderfall des wiederholten 2-Personen Gefangenendilemmas etwa so führen: Wenn jedem Spieler der Maximin-Wert garantiert werden soll, dann kann das Gleichgewichts-Resultat für jeden der Spieler nur Werte von  $P$  bis  $R$  haben. Andernfalls (bei Werten kleiner  $P$  oder bei Werten größer  $R$ ) müsste einer der Spieler freiwillig auf den Minimax-Wert verzichten, obwohl er diesen Wert notfalls immer durch Defektion erzwingen könnte. Sei  $X$  nun irgendein Wert für den gilt:  $P \leq X \leq S$ . Dann gibt es eine Zugfolge, die jedem Spieler die Auszahlung  $X$  liefert. (Beispiel: Angenommen  $P = 1$  und  $S = 3$  und  $X = 2\frac{1}{3}$ , dann

liefert die Zugfolge *Kooperation, Kooperation, Defektion* wenn sie von beiden Spielern gespielt wird, jedem Spieler genau die Auszahlung  $X = 2\frac{1}{3}$ .) Dann lässt sich diese Zugfolge aber durch eine spezielle Variante der Strategie „Unerbittlich“ erzwingen, die selbst diese Zugfolge spielt und genau dann für den Rest des Spiels auf Bestrafung umschaltet, wenn der Gegenüber von dieser Zugfolge ein einziges Mal abweicht. Wenn wir diese Variante „Unerbittlich“ nennen, dann bildet das Strategiepaar (Unerbittlich\*, Unerbittlich\*) ein Gleichgewicht, denn keiner der beiden Spieler kann von seiner Gleichgewichtsstrategie abweichen, ohne mit einer schlechteren Durchschnittsauszahlung rechnen zu müssen.

### 5.2.3 Evolutionäre Spieltheorie

#### Evolutionäre Spieltheorie am Beispiel des wiederholten Gefangenendilemmas

Das Modell des wiederholten Gefangenendilemmas war für lange Zeit eines der populärsten Modelle der evolutionären Spieltheorie. Besonders durch den auf Computersimulationen gestützten Ansatz von Robert Axelrod (Axelrod, 1984) ist es weithin bekannt geworden. Leider hat die Popularität dieses Modells zu einer maßlosen Überschätzung seiner Leistungsfähigkeit geführt. Einer unüberschaubaren Fülle von reinen Modell- und Simulationsstudien steht ein mehr als auffälliger Mangel an empirischen Anwendungen gegenüber. Da das Modell aber ebenso anschaulich wie leicht verständlich ist, werden wir es hier dennoch zur Einführung in einige der Grundgedanken der evolutionären Spieltheorie heranziehen. Auf die Probleme werden wir danach kurz eingehen.

Wie wir gesehen haben, existiert im wiederholten Gefangenendilemma keine dominante Strategie und es gibt eine Vielzahl von Gleichgewichtsstrategien. Können wir trotzdem irgendwelche Strategien als gute oder in irgendeinem anderen Sinne als dem der Dominanz als „beste“ Strategien auszeichnen. Der (aus heutiger Sicht naive) Ansatz, den Axelrod verfolgt hat (Axelrod, 1984), bestand darin, einfach eine größere Menge von unterschiedlichen Strategien in einer Art Turnier gegeneinander antreten zu lassen. Jede Strategie spielt gegen jede andere ein paarweise Gefangenendilemma durch. „Gewonnen“ hat am Ende die Strategie, die die höchste Durchschnittspunktzahl über alle Begegnungen erzielt hat. (Wohlbemerkt: Es kommt bei diesem Turnier auf die Durchschnittspunktzahl und nicht auf die Anzahl gewonnenen Begegnungen bzw. der besiegten Gegner an, ganz wie es dem ökonomischen Menschbild des „neidlosen Egoisten“ entspricht.) Da man die Strategien im wiederholten Gefangenendilemma sehr leicht programmieren kann, führt man

entsprechende Turniere am besten mit dem Computer durch.<sup>3</sup>

Um das Prinzip zu verdeutlichen, wird an dieser Stelle nur ein sehr einfaches Turnier mit einer sehr kleinen Strategiemenge von 7 Strategien besprochen. Diese ausgewählten Strategien sind:

- *Grim* („Unerbittlich“): Kooperiere in der ersten Runde; setze in den folgenden Runden die Kooperation fort, solange der Gegner kooperiert; Defektiere bis zum Ende der Begegnung, wenn der Gegner ein einziges Mal defektiert hat.
- *TitForTat* („Wie Du mir, so ich Dir“): Kooperiere in der ersten Runde; Wenn der Gegner in der letzten Runde kooperiert hat, kooperiere auch, sonst defektiere.
- *Pavlov*: Defektiere in der ersten Runde. Schalte die Taktik von Defektion auf Kooperation oder von Kooperation auf Defektion um, sofern der Gegner in der letzten Runde defektiert (d.h. „bestraft“) hat. Sonst behalte die bisherige Taktik bei, d.h. spiele so wie in der letzten Runde.
- *Tester*: Defektiere in den ersten beiden Runden. Reagiert der Gegner mit Defektion (also mit einer „Bestrafung“), dann kooperiere zweimal in Folge (als „Wiedergutmachung“) und spiele für den Rest des Spiels „Wie Du mir, so ich Dir“. Hat der Gegner die Defektionen in den ersten beiden Runden nicht bestraft, dann spiele für den Rest des Spiels abwechselnd Defektionszüge (zur „Ausbeutung“) und Kooperationszüge.
- *Hawk* („Falke“): Defektiere immer.
- *Dove* („Taube“): Kooperiere immer.
- *Random* („Zufall“): Kooperiere oder Defektiere völlig zufällig.

Ein „Turnier“ dieser Strategien liefert für die Auszahlungsparameter  $T = 5, R = 3, P = 1, S = 0$  (siehe Seite 239) folgendes Ergebnis:

Rang	Strategie	Durchschnittspunkte
1.	TitForTat:	2.4631
2.	Grim:	2.4270
3.	Tester:	2.3565
4.	Pavlov:	2.2185
5.	Hawk:	2.1486
6.	Random:	1.9992
7.	Dove:	1.7121

---

<sup>3</sup>Wen es interessiert, der kann sich die Software dafür von dieser Web-Seite herunterladen: <http://www.eckhartarnold.de/apppages/coopsim.html>

In diesem Fall hat also *TitForTat* das Turnier gewonnen. Die Durchschnittspunktzahl von 2,46 liegt zwar deutlich unter der Auszahlung für wechselseitige Kooperation von 3 Punkten, aber das ist nicht verwunderlich, da man gegen eine Strategie wie *Hawk*, die immer defektiert, bestenfalls eine Durchschnittspunktzahl von 1 erzielen kann. Auffällig ist, dass in diesem Beispiel böartige Strategien wie *Tester*, die versuchen naive Strategien wie *Dove* auszubeuten, nicht die erfolgreichsten sind. Aber das ist erklärlich, wenn auch Strategien wie *Grim* im Rennen sind, die von „böartigen“ Strategien wie *Tester* keine Friedensangebote akzeptieren. So erzielt *Tester* gegen *Grim* nur eine Durchschnittspunktzahl von knapp 1 (was der Auszahlung für wechselseitige Defektion entspricht), während *TitForTat* und *Grim* kooperieren, so dass *TitForTat* gegen *Grim* satte 3 Punkte erhält. Es ist zu betonen, dass das Ergebnis sehr stark von der Ausgangsstrategiemenge und von den gewählten Auszahlungsparametern abhängt. Wandelt man das eine oder andere ab, dann kann eine ganz andere Strategie die beste sein. Grundsätzlich sollte man keine voreiligen und verallgemeinernden Schlussfolgerungen aus Computersimulationen mit willkürlich festgesetzten Ausgangsbedingungen und Parameterwerten ziehen.

Bis hierher hat das Computerturnier nur etwas mit wiederholten Spielen, aber noch nichts mit Evolution zu tun. Zu einem evolutionären Modell wird das Computerturnier, wenn man die Durchschnittsauszahlungen als *Fitnesswerte* interpretiert. Man stellt sich dazu vor, dass wir es mit einer großen Population von Spielern und einer kleinen Menge von Spielertypen zu tun haben. Der Typ eines Spielers ist die Strategie, die er spielt. Um es noch ein wenig anschaulicher zu machen, können wir uns auch eine Population von Tieren vorstellen, die in Gemeinschaft leben, etwa einen Vogelschwarm. Bei der Nahrungssuche unterstützen die Vögel einander, aber es gibt genetisch bedingte Unterschiede. Einige Tiere sind extrem sozial, d.h. sie unterstützen jeden Artgenossen (Strategie: *Dove*), andere machen die Unterstützung eines Artgenossen davon abhängig, ob sie erwidert wird (*TitForTat*), wieder andere verhalten sich völlig egoistisch (*Hawk*). Der Erfolg bei der Nahrungssuche hängt nun davon ab, wie leistungsfähig jede der Strategien ist. Zugleich kann man davon ausgehen, dass sich der Erfolg bei der Nahrungssuche in Fortpflanzungserfolg umsetzt. Das bedeutet aber wiederum, dass eine erfolgreiche Strategie in der folgenden Generation häufiger auftritt und eine weniger erfolgreiche seltener, sie könnte irgendwann sogar ganz aussterben.

Um nun diese Überlegungen in das Modell zu übertragen, gehen wir der Einfachheit halber davon aus, dass in der ersten Generation auf jede Strategie auf ein gleich großer Anteil der Spielpopulation entfällt. Für die nächste Generation wird der Populationsanteil dann allerdings mit dem Fitnesswert multipliziert. Der Fitnesswert entspricht nach der ersten Generation noch ge-

nau den Durchschnittsauszahlungen, die auf die (gleichverteilten) Strategien entfallen. In den folgenden Generationen darf man jedoch nicht mehr einfach den Durchschnitt bilden, sondern muss für jede Strategie das mit dem Bevölkerungsanteil der Gegnerstrategien gewichtete Mittel der Ergebnisse der einzelnen Begegnungen berechnen. Das ist durchaus einleuchtend, wenn man sich vor Augen hält, dass der Erfolg einer Strategie wie *Tester* umso größer ist, je mehr *Dove*-Spieler in der Population vorkommen, und dass er geringer wird, wenn der Populationsanteil von *Dove*-Spielern absinkt. Im Laufe von mehreren Generationen ändern sich also sowohl die Populationsanteile der Strategien als auch die Fitnesswerte der Strategien (weil sie von den Populationsanteilen abhängen). Mathematisch werden diese Zusammenhänge folgendermaßen ausgedrückt:

$$F_i = \sum_{k=1}^n S_{ik} P_k \quad (5.2.1)$$

$F_i$	Fitness der $i$ -ten Strategie
$S_{ik}$	Auszahlung für die $i$ -te Strategie gegen die $k$ -te Strategie
$P_k$	Bevölkerungsanteil der $k$ -ten Strategie
$n$	Anzahl der vorkommenden Strategien
$i, k$	Indizes einzelner Strategien ( $0 \leq i, k \leq n$ )

Anstatt mit der absoluten Zahl von Individuen zu rechnen, die eine Strategie angenommen haben, wobei man die Größe der Population willkürlich festlegen müsste, rechnet man der Einfachheit halber immer mit relativen Bevölkerungsanteilen einer gedachten unendlich großen Bevölkerung. (Die Bevölkerungsanteile müssen sich dabei immer zu 1 aufsummieren, weshalb man sie nach jeder Generation renormieren muss.) Neben der Formel, nach der die Fitness berechnet wird, ist noch eine Formel notwendig, um die Bevölkerungsanteile, die in der Folgegeneration auf jede Strategie entfallen, zu berechnen:

$$P_i^{g+1} = \frac{P_i^g F_i^g}{\sum_{k=1}^n P_k^g F_k^g} \quad (5.2.2)$$

$P_i^g$	Populationsanteil der $i$ -ten Strategie in der $g$ -ten Generation
$F_i^g$	Fitness der $i$ -ten Strategie in der Generation Nummer $g$
$g$	die Nummer der gegenwärtigen Generation
$n$	Anzahl der vorkommenden Strategien
$i, k$	Indizes einzelner Strategien ( $0 \leq i, k \leq n$ )

Die Formel sieht sehr viel hässlicher aus, als sie ist. Alles Wichtige steht im Zähler des Bruchs. Der Nenner dient lediglich der Renormierung. (Wir

teilen einfach den nicht normierten Bevölkerungsanteil jeder Strategie durch die Summe aller nicht normierten Bevölkerungsanteile.)

Übt die evolutionäre Entwicklung einen Einfluss darauf aus, welche Strategien erfolgreich sind? Dazu betrachten wir die Rangfolge nach 50 Generationen:

Rang	Strategie	Bevölkerungsanteil	Durchschnittspunkte
1.	TitForTat	0.7745	3.0000
2.	Grim	0.1922	2.9984
3.	Dove	0.0325	2.9988
4.	Tester	0.0008	2.6461
5.	Random	0.0000	1.9727
6.	Pavlov	0.0000	1.8125
7.	Hawk	0.0000	1.1338

Die Strategie *TitForTat* steht nach wie vor an der Spitze, aber die Strategie *Tester* ist vom dritten auf den vierten Platz abgesackt und *Hawk* befindet sich nunmehr ganz am Ende der Tabelle. Die evolutionäre Entwicklung lässt sich sehr anschaulich in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen, wenn man auf der X-Achse die Generation und auf der Y-Achse die Bevölkerungsanteile für jede Strategie einträgt, wie auf der Abbildung 5.1 auf Seite 249 zu sehen ist. Ganz grob kann man die Entwicklung folgendermaßen charakterisieren. Durch Präsenz ausbeuterischer Strategien (*Tester*, *Hawk* und m.E. auch *Pavlov* und *Random*) sacken die rein kooperativen Strategien (in dieser Simulation nur *Dove*) am Anfang stark ab. Dadurch verlieren aber die ausbeuterischen Strategien auf längere Sicht gesehen ihre Basis, so dass sich die reziproken Strategien durchsetzen. Ein hoher Anteil reziproker Strategien (d.h. Strategien, die Wohlverhalten belohnen und Fehlverhalten bestrafen wie *TitForTat* und besonders *Grim*) bewirkt schließlich, dass erstens die ausbeuterischen Strategien sich nicht wieder erholen und zweitens ein gewisser Anteil rein kooperativer Strategien „im Windschatten“ der reziproken Strategien überleben kann.

Es ist durchaus charakteristisch, dass evolutionäre Entwicklung am Ende mit einem Mix von Strategien zum Stillstand kommt. *TitForTat*, *Dove* und *Grim* kooperieren immer miteinander, so dass die Unterschiede zwischen diesen Strategien unter Abwesenheit anderer Strategien gar nicht zum tragen kommen und keine Verschiebungen in der Bevölkerungsverteilung mehr bewirken können. Man kann die Situation auch so interpretieren, dass sich am Ende eine gemischte Strategie durchgesetzt hat, die zu ca. 77,5% *TitForTat*, 19,2% *Grim* zu und zu 3,3% *Dove* spielt. Übrigens ist das auch eine übliche Interpretation gemischter Strategien im evolutionären Zusammenhang: Eine gemischte Strategie kann man auch als eine gemischte Population reiner



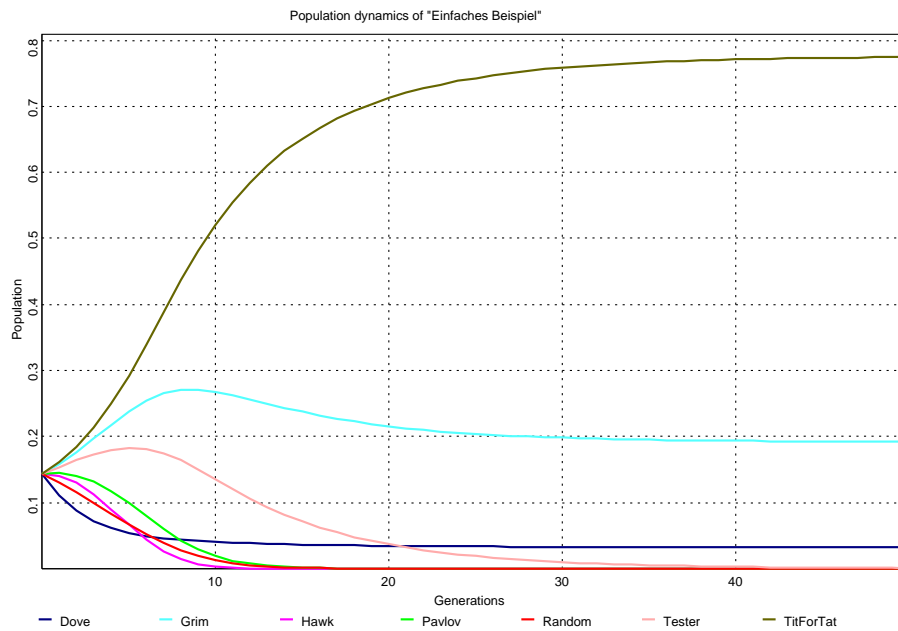


Abbildung 5.1: Beispiel einer evolutionären Simulation des wiederholten Gefangenendilemmas

Strategien auffassen.

Bei evolutionären Computersimulationen stellt sich in besonderer Schärfe das Problem der *Modellkontingenzt* (d.h. die Ergebnisse sind abhängig von der Ausgangssituation und den Modellparametern und damit kaum verallgemeinerbar).<sup>4</sup> Bloß auf Grund von Simulationsläufen, seien dies nun einzelne oder eine große Zahl von Simulationsläufen, lässt sich bestenfalls ein subjektiver Eindruck davon gewinnen, welche Strategien vorteilhaft sind und welche nicht.

Aussichtsreicher, da weniger kontingenztbehaftet, erscheint der Versuch einer mathematischen Charakterisierung vorteilhafter Strategien. Ähnlich wie in der gewöhnlichen Spieltheorie der Begriff des Nash-Gleichgewichts entwickelt wurde, um bestimmte Strategien bzw. Strategiekombinationen aus-

<sup>4</sup>Axelrod glaubte aufgrund der detaillierten Analyse mehrfacher Simulationsläufe die Strategie *TitForTat* als eine besonders vorteilhafte Strategie auszeichnen zu können (Axelrod, 1984, S. 25ff, S. 29ff.). Ken Binmore argumentiert jedoch überzeugend dagegen und zeigt, dass die vermeintliche Überlegenheit von *TitForTat* als theoretischer Befund nicht haltbar ist (Binmore, 1998, S. 313). (Empirisch bestätigt ist sie ohnehin nicht, siehe unten, Kapitel 5.2.3). Angesichts der außergewöhnlichen Popularität von Axelrods Ansatz spricht Binmore daher durchaus treffend von der „Tit for Tat Bubble“ (Binmore, 1994, S. 194).

zuzeichnen, gibt es auch in der evolutionären Spieltheorie diverse Gleichgewichtsbegriffe, durch die evolutionäre Strategien charakterisiert werden können. Der wichtigste davon ist der Begriff des „evolutionären Gleichgewichts“ bzw. der *evolutionär stabilen Strategien* (ESS). Als „evolutionär stabil“ charakterisiert man Strategien, die, wenn sie sich einmal in einer Population durchgesetzt haben, vor dem Eindringen von mutierten Strategien geschützt sind. Zur Charakterisierung von Strategien im wiederholten Gefangenendilemma-Spiel bietet sich allerdings eher der etwas schwächere Begriff der kollektiven Stabilität an. Im folgenden wird daher vorwiegend von kollektiver Stabilität die Rede sein.

Eine Strategie  $A$  gilt als „kollektiv stabil“ wenn kein einzelnes Individuum einer anderen Strategie  $B$  in eine Population, die nur aus Individuen der der Strategie  $A$  gebildet wird „eindringen“ kann. Eindringen kann  $B$  genau dann, wenn die Auszahlung, die  $B$  der Begegnung mit  $A$  erhält (formal:  $V(B/A)$ , wobei das  $V$  für „value“ steht, also den Wert des Spiels für Spieler  $B$  wiedergibt) größer ist, als die Auszahlung, die  $A$  gegen sich selbst erhält ( $V(A/A)$ ), kurz „Eindringen“ wird durch die Ungleichung beschrieben:

$$V(B/A) > V(A/A)$$

Wenn diese Ungleichung erfüllt ist, dann wird ein einzelner  $B$ -Spieler nämlich eine höhere Durchschnittsauszahlung erhalten als die  $A$ -Spieler und sich damit stärker vermehren, so dass sich die  $B$ -Spieler schließlich in der  $A$ -Population ausbreiten.

Kollektiv stabil ist eine Strategie  $A$  nun genau dann, wenn keine andere Strategie  $B$  existiert, die in  $A$  eindringen kann, d.h. wenn

$$\forall_B \quad V(B/A) \leq V(A/A)$$

Man kann nun leicht zeigen, dass die Strategie *TitForTat* kollektiv stabil ist, denn *TitForTat* erhält gegen sich selbst als Durchschnittspunktzahl den Kooperationsgewinn von 3 (bzw.  $R$ ). Keine Strategie, die gegen *TitForTat* ausschließlich kooperiert, kann mehr als 3 (bzw.  $R$ ) Punkte erhalten. Damit können aber höchstens noch solche Strategien in eine Population von *TitForTat*-Spielern eindringen, die gegen *TitForTat* nicht immer kooperieren. Wenn eine Strategie aber in irgendeiner Runde gegen *TitForTat* nicht kooperiert, dann wird sie in den folgenden Runden von *TitForTat* solange bestraft, bis sie eine Bestrafung „hinnimmt“, d.h. bis sie in einer der Runden, in der *TitForTat* bestraft, ihrerseits nicht defektiert. Dann erhält sie von der Runde, in der sie ausbeutet, zusammen genommen mit der Runde, in der sie die Bestrafung hinnimmt, eine Durchschnittsauszahlung von  $5+0$  (bzw.  $T+S$ ), was kleiner als 3 (bzw.  $R$ ) ist. (Gibt es dazwischen Runden wechselseitiger Defektion, so

ist die Durchschnittsauszahlung von 1 (bzw.  $P$ ) ohnehin kleiner als 3 (bzw.  $R$ ).) Damit sinkt aber der Gesamtdurchschnitt  $V(\text{Eindringling}/\text{TFT})$  unter die Kooperationsauszahlung von  $R$ . Wegen  $V(\text{TFT}/\text{TFT}) = R$  gilt also  $V(\text{Eindringling}/\text{TFT}) < V(\text{TFT}/\text{TFT})$ . Mit anderen Worten eine Strategie, die gegen *TitForTat* irgendwann einmal nicht kooperiert, kann erst recht nicht in eine Population von *TitForTat*-Spielern eindringen. (Dieser Beweis gilt, so wie er geführt wurde, zunächst einmal für ein idealisiertes unendlich oft wiederholtes Gefangenendilemma. Man kann ihn aber auch leicht auf unbestimmt oft wiederholte endliche Spiele übertragen, sofern die Wahrscheinlichkeit, mit der nach jeder Runde das Spiel abgebrochen wird, klein genug (bezogen auf die Auszahlungsparameter in ihrem Verhältnis zueinander) gewählt wird, so dass – grob gesagt – die Chance, dass die Runde, in der defektiert wird, die letzte ist, nicht den zu erwartenden Schaden ausgleicht, falls sie es doch nicht ist.)

Aber ebenso ist auch die Strategie *Hawk* kollektiv stabil, denn jede andere Strategie kann gegen *Hawk* höchstens eine Durchschnittspunktzahl von 1 (bzw.  $P$ ) erzielen, was aber nicht mehr ist als *Hawk* gegen sich selbst erzielt. Wenn *Hawk* und *TitForTat* beide gleichermaßen kollektiv stabil sind, kann man dann noch eine dieser beiden Strategien bezüglich der ihrer Stabilität vor der anderen auszeichnen? Man kann: Bei der kollektiven Stabilität wird nur gefragt, ob ein einzelner Eindringling sich in einer Fremdpopulation ausbreiten kann. Aber wie verhält es sich, wenn eine kleine Gruppe von Eindringlingen versucht, in eine Fremdpopulation einzudringen? Angenommen eine kleine Gruppe von *TitForTat*-Spielern versucht in eine Gruppe von *Hawk*-Spielern einzudringen. Dann ist  $V(\text{TFT}/\text{Hawk})$  geringfügig kleiner als  $V(\text{Hawk}/\text{Hawk})$ , da TFT in der ersten Runde einen Kooperationsversuch wagt. Andererseits erhalten die TFT-Spieler untereinander die Kooperationsauszahlung  $R$ , die erheblich größer ist als die Defektionsauszahlung  $P$ , die die *Hawk*-Spieler untereinander erhalten ( $V(\text{TFT}/\text{TFT}) \gg V(\text{Hawk}/\text{Hawk})$ ). Dementsprechend könnte schon eine Minderheit von TFT Spielern eine höhere Durchschnittsauszahlung erhalten als die Mehrheitspopulation der *Hawk*-Spieler. Umgekehrt ist das nicht der Fall. Das bedeutet aber, dass eine Population von *Hawk*-Spielern nur relativ schwach gegen das Eindringen durch eine Gruppe von *TitForTat*-Spielern geschützt ist.<sup>5</sup> Dominieren die *TitForTat*-Spieler aber erst einmal die Population, so hat umgekehrt eine Gruppe von *Hawk*-Spielern kaum eine Chance in die Population einzudringen. Es besteht also eine Asymmetrie zwischen reziproken und böartigen Strategien, die sich

---

<sup>5</sup>Wieviele TFT-Spieler notwendig sind, um in eine Population von *Hawk*-Spielern einzudringen, hängt von der relativen Größe der Auszahlungsparameter und der durchschnittlichen Spiellänge ab.

zugunsten der reziproken Strategien auswirkt.

Der Begriff der kollektiven Stabilität hat die Schwäche, dass kollektiv stabile Strategien nicht unbedingt gegen das Eindringen von Mutationen geschützt sind, die gegen die Vertreter der Stammpopulation genauso gut abschneiden wie diese gegen sich selbst. Damit schließt die kollektive Stabilität einer Strategie z.B. nicht aus, dass ihre Population gegen die Ausbreitung degenerierender Mutationen geschützt ist. So könnte sich innerhalb einer Population von *TitForTat*-Spielern die Strategie *Dove* ungehindert ausbreiten, da keinerlei „Erhaltungsselektion“ statt findet, durch die die „schwächeren“ *Dove*-Spieler in einem Millieu von *TitForTat*-Spielern an der Ausbreitung gehindert würden. Aus diesem Grund ist insbesondere in der Biologie ein vergleichsweise stärkeres Konzept als das der kollektiven Stabilität üblich, nämlich das der *evolutionären Stabilität*.

*Evolutionäre Stabilität:* Eine Strategie  $A$  ist evolutionär stabil, wenn für jede beliebige Strategie  $B$  gilt, dass entweder

$$V(A/A) > V(B/A)$$

oder

$$V(A/A) = V(B/A) \quad \wedge \quad V(A/B) > V(B/B)$$

Für die Analyse des wiederholten Gefangenendilemma-Spiels erscheint dieser vergleichsweise stärkere Begriff jedoch nicht unbedingt geeignet, weil es dann äußerst schwierig wird, überhaupt noch eine Strategie zu konstruieren, die evolutionär stabil ist. Eine reziproke Strategie könnte gegenüber von *Dove*-Mutanten nur noch dann evolutionär stabil sein, wenn sie einen Mechanismus enthält, der die Abwesenheit des eigenen Bestrafungsmechanismus sanktioniert (wodzu dieser Mechanismus durch zufällige Defektion aber erst einmal ausgelöst werden muss). Aber nicht nur ausbleibende Bestrafungen müssten sanktioniert werden, sondern auch ausbleibende Bestrafungen von ausbleibenden Bestrafungen usf. Ob eine solche Strategie wenigstens theoretisch denkbar ist, sei hier einmal dahin gestellt.

### **Die empirische Unanwendbarkeit spieltheoretischer Evolutionsmodelle**

Das Modell des wiederholten Gefangenendilemmas war lange Zeit (und ist möglicherweise immer noch) eines der beliebtesten Modelle der evolutionären Spieltheorie. Es sind Unmengen von Simulationstudien publiziert worden, die in der ein- oder anderen Form das wiederholte Gefangenendilemma durchspielen (Hoffmann, 2000). Wie steht es aber um die empirische Anwendung

dieser Modelle? Sucht man nach erfolgreichen Anwendungsbeispielen auch nur irgendeiner dieser Simulationsstudien, so stellt man schnell fest, dass sie praktisch nicht existieren. Etwas mehr als 10 Jahre nach der Publikation von Axelrod's Buch (Axelrod, 1984) finden wir in der breit angelegten Meta-Studie eines Biologen (Dugatkin, 1997), der den spieltheoretischen Ansatz sehr entschieden favorisiert, kein einziges greifbares Beispiel, das man ernsthaft als Bestätigung des Modells im empirischen Zusammenhang betrachten kann. Vor diesem Hintergrund muss es verwundern, wenn ein anderer Autor wiederum einige Jahre später in einem Forschungsbericht behauptet, dass es reichlich empirische Anwendungen des wiederholten Gefangenendilemmamodells in der Biologie gäbe (Hoffmann, 2000). Der einzige Beleg, den er dafür anführt, ist eine Experimentalstudie aus den 80er Jahren (Milinski, 1987), wobei ihm entgeht, dass diese Studie der darauf folgenden wissenschaftlichen Diskussion nicht standgehalten hat. So entstehen Legenden in der Wissenschaft...

Wie kann es aber sein, dass es für ein Modell wie das des wiederholten Gefangenendilemmas, das in der Theorie so einleuchtend erscheint, kaum empirische Anwendungsbeispiele gibt. Um das zu verstehen muss man zwei unterschiedliche Niveaus der Anwendung von Modellen auf empirische Phänomene unterscheiden. Die erste Stufe ist die des bloß metaphorischen Vergleichs. Die zweite und wichtigere Stufe ist die einer Anwendung im vollen Sinne, die mit einem Erklärungsanspruch verbunden ist.

Metaphorische Vergleiche lassen sich immer sehr leicht anstellen, und es ist nicht schwer im täglichen Leben, in der Wirtschaft, der Politik oder in der Natur etc. Vorgänge zu finden, die dem Modell des wiederholten Gefangenendilemmas irgendwie (!) ähneln. Aber bloß weil man irgendwelche Ähnlichkeiten zwischen dem Modell und bestimmten empirischen Vorgängen feststellt, kann man noch nicht ernsthaft behaupten, dass das Modell diese Vorgänge erklärt, denn es ist ja sehr wohl möglich, dass die empirischen Vorgänge in der Wirklichkeit ganz andere Ursachen haben als die analogen Vorgänge im Modell.

Damit ein Modell tatsächlich als Erklärung eines Phänomens betrachtet werden kann, müssen weitere Voraussetzungen erfüllt werden. Zum Beispiel ist es erforderlich sämtliche Eingangs- und Ausgangsparameter des Modells empirisch zu messen. Nur wenn man alle Parameter messen kann und wenn die gemessenen Ausgangsparameter mit dem vom Modell aus den gemessenen Eingangsparametern errechneten Ergebnissen übereinsimmen, kann man behaupten, dass das Modell den in Frage stehenden Vorgang erklärt. Vor allem müssen die Parameter mindestens so genau gemessen werden können, dass das Modell innerhalb der Messungenauigkeiten einigermaßen stabile Ergebnisse liefert. Andernfalls wäre eine Übereinstimmung der gemessenen mit

den errechneten Parametern nur zufällig.

Nun besteht bei vielen spieltheoretischen Modellen das Problem darin, dass sich die Auszahlungsparameter einfach nicht zuverlässig messen lassen. Ganz besonders gilt dies für das Modell des wiederholten Gefangenendilemmas, denn dieses Modell reagiert sensitiv auf Schwankungen der Eingangsparameter, d.h. welche Strategie sich evolutionär durchsetzt hängt sehr wesentlich unter anderem davon ab, welche Auszahlungsparameter man wählt. Eines der beliebtesten Standardbeispiele für die vermeintliche Logik der „Evolution der Kooperation“, das Wechselseitige Entlausen von Schimpansen („Grooming“), kann dieses Problem sehr anschaulich vor Augen führen. Um ihr Fell von Ungeziefer zu befreien, pflegen Schimpansen sich gegenseitig zu helfen. Die Entlausungssitzungen finden in der Regel in Paaren statt, wobei sich die Schimpansen abwechseln. Das Erscheinungsbild der Entlausungssitzungen legt die Annahme nahe, dass es sich dabei um ein evolutionär bedingtes reziprokes (also *TitForTat*-artiges) Kooperationsverhalten handelt. Dieses möglicherweise vorhandene reziproke Kooperationsverhalten ist natürlich noch durch andere Faktoren des Soziallebens von Schimpansen überlagert, so z.B. durch die Dominanzhierarchie unter den Tieren. Aber selbst wenn wir davon einmal absehen, stellt sich für die Anwendung unseres wiederholten Gefangenendilemmamodells ein unüberwindbares Problem: Wie soll man die Auszahlungsparameter messen? Da wir die fitness-relevante Auszahlung dieser Verhaltensweise im Modell voraussetzen, müssten wir, um das Modell empirisch überprüfen zu können, irgendwie messen können, welche Auswirkungen ein wohlentlaustes Fell auf die Reproduktionsrate hat, und wir müssten auf der anderen Seite auch die Kosten (wiederum hinsichtlich der Reproduktionsrate) beziffern, die einem Affen entstehen, der einem anderen das Fell entlaust. Die Forschungen, die es in dieser Hinsicht tatsächlich gibt, sind bisher weit davon entfernt, die für die Überprüfung des wiederholten Gefangenendilemma- oder eines ähnlichen Modells erforderlichen Daten zu liefern. Und es ist sehr fraglich, ob dieses Ziel jemals erreicht werden kann.

Nun könnte man sich auf den Standpunkt zurückziehen, dass auch eine metaphorische Verwendung des Modells immer noch eine Art von – allerdings sehr viel schwächerem – Erkenntnisgewinn darstellt. Das mag stimmen, nur ist ansichts des außerordentlich bescheidenen Erkenntnisziels eines bloßen metaphorischen Vergleichs der riesige Aufwand der für die Modellforschung getrieben wird, kaum noch vertretbar (Hammerstein, 2003). Insbesondere kann man nicht ernsthaft behaupten, dass durch die Untersuchung künstlich generierter Daten (von Computersimulationen) einen Beitrag zur Erforschung der Evolution von Kooperation geleistet werden kann, wenn man die Ergebnisse nicht auch einer empirischen Überprüfung unterzieht.

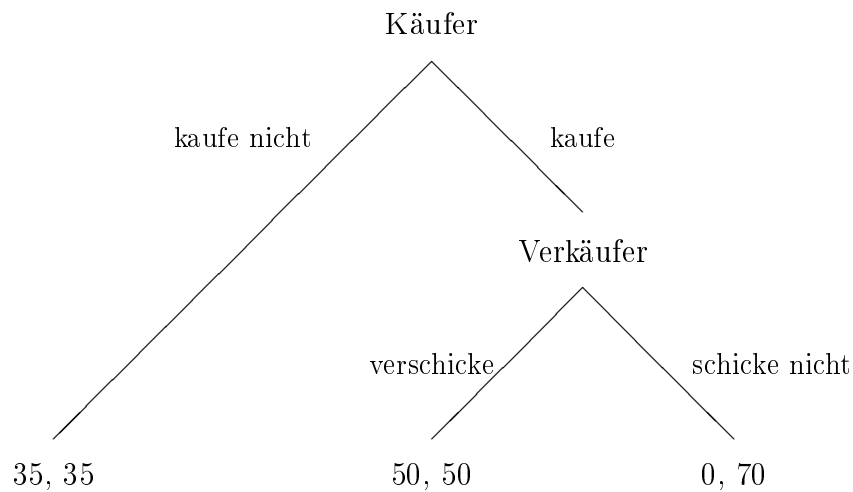
Aus heutiger Sicht muss man das Modell des wiederholten Gefangenendi-

lemmas daher wohl vor allem als ein weiteres beschämendes Beispiel wirklichkeitsfremder Modellforschung und der Verselbstständigung einer technisierten Methodik betrachten, wie sie leider in der Konsequenz des szientistischen Paradigmas liegt, d.h. der naiven Überzeugung echte Wissenschaftlichkeit zeichne sich vor allem durch den Gebrauch mathematischer und technischer Methoden aus, und als sei nicht vielmehr die Wahl der Methode nach dem Erkenntnisgegenstand zu richten und ihr Einsatz dem empirischen Erkenntniszweck der Wissenschaft strikt unterzuordnen.

#### 5.2.4 Ein Anwendungsbeispiel der Spieltheorie, das funktioniert: Vertrauen bei Internetauktionen

Um nun nicht derart pessimistisch zu schließen, soll zum Schluss wenigstens noch ein erfolgreicheres Beispiel der empirischen Anwendung spieltheoretischer Forschung vorgestellt werden, wenn es auch nicht gerade aus dem Bereich der evolutionären Spieltheorie stammt. Es handelt sich dabei um zwei Experimente, die im Rahmen einer umfangreicheren Studie über Vertrauen im Internethandel angesellt wurden (Bolton, Katok, and Ockenfels, 2004), und die zeigen, wie man mit Hilfe spieltheoretischer Begriffe und einfacher spieltheoretischer Modelle menschliche Verhaltenstypen unterscheiden und empirisch untersuchen kann, auch wenn sich die der Spieltheorie traditionellerweise zu Grunde liegenden strengen Rationalitätsannahmen rasch als ungültig erweisen und die spieltheoretische Lösungstheorie und das Nash-Gleichgewicht in diesem Zusammenhang weniger hilfreich sind (außer eben als Beispiel dafür, wie Menschen sich gerade nicht verhalten).

Bei Internethandelsplattformen und Internetauktionen wie E-Bay haben die Transaktionen den Charakter von Vertrauensspielen: Der Käufer, der eine Ware ersteigert oder gekauft hat, überweist zuerst das Geld für die Ware. Sobald das Geld eingegangen ist verschickt der Verkäufer die Ware. Dabei muss der Käufer dem Verkäufer vertrauen, denn der Verkäufer könnte die Ware auch behalten, nachdem er das Geld schon bekommen hat. Umgekehrt hat der Verkäufer ein Interesse daran, dass ihm der Käufer traut. Denn sonst würde der Käufer gar nicht erst auf das Geschäft eingehen. Grafisch lässt sich das entsprechende Vertrauensspiel so darstellen.



Quelle: Bolton, Katok, Ockenfels (Bolton, Katok, and Ockenfels, 2004)

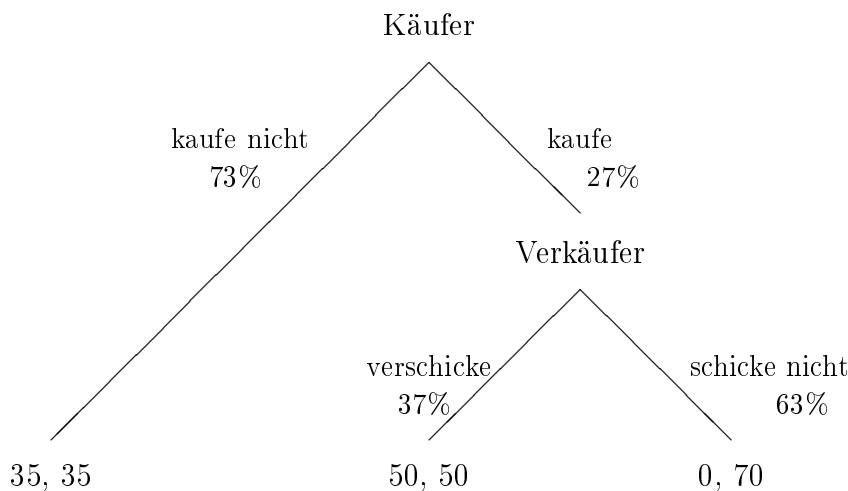
Dabei gibt die erste Zahl die Auszahlung für den Käufer an und die zweite diejenige für den Verkäufer. In das Spiel geht, wie man sieht, die Annahme ein, dass beide einen Vorteil von der Transaktion haben. Findet sie statt erhält jeder eine Auszahlung von 50 statt nur 35, wenn keine Transaktion statt findet. Charakteristischerweise sind die Internetauktionen auf Internet-handelsplattformen einmalige Vorgänge, d.h. derselbe Verkäufer und derselbe Käufer treffen höchstwahrscheinlich nicht wieder aufeinander. Außerdem finden sie mehr oder weniger anonym ohne direkten Kontakt statt. Genau diese Situation wurde im Experiment nachgestellt. Eine größere Anzahl von Probanden spielte das gegebene Vertrauensspiel über eine Computerschnittstelle jeweils ein einziges mal mit einem unbekannten Partner. Wer die Rolle des Käufers und wer die des Verkäufers zu übernehmen hatte, wurde dabei vorher zufällig ausgewählt. Die Teilnehmer bekamen anschließend einen Geldbetrag ausgezahlt, der proportional zu den im Spiel gewonnen Punkten war. Anders als bei realen Internetplattformen wurde das Experiment zunächst ohne irgendeine Art von Bewertungs- und Reputationsmechanismus durchgeführt. Auch bestand nach dem Experiment selbstverständlich keinerlei Möglichkeit, „unehrliche“ Verkäufer strafrechtlich zur Verantwortung zu ziehen.

Bevor wir nun auf die Ergebnisse des Experiments eingehen, sollten wir uns fragen, wie sich rationale Spieler im Sinne der Theorie verhalten würden. Da die Interaktion nur einmal stattfindet, würde ein rationaler nutzenmaximierender Verkäufer die Ware auf keinen Fall verschicken, da er 70 statt



bloß 50 Punkte erhält, wenn er die Ware behält. Ein Käufer, der davon ausgeht, dass der Verkäufer sich rational verhält, würde sich daher rationaler Weise gar nicht auf das Geschäft einlassen. Würden sich alle Probanden rational im Sinne der Theorie verhalten, und dies auch bei ihren Spielpartnern voraussetzen, dann dürfte im Experiment kein einziges Geschäft zu Stande kommen.

Wie demgegenüber der experimentelle Befund ausgefallen ist, zeigt die folgende Abbildung:



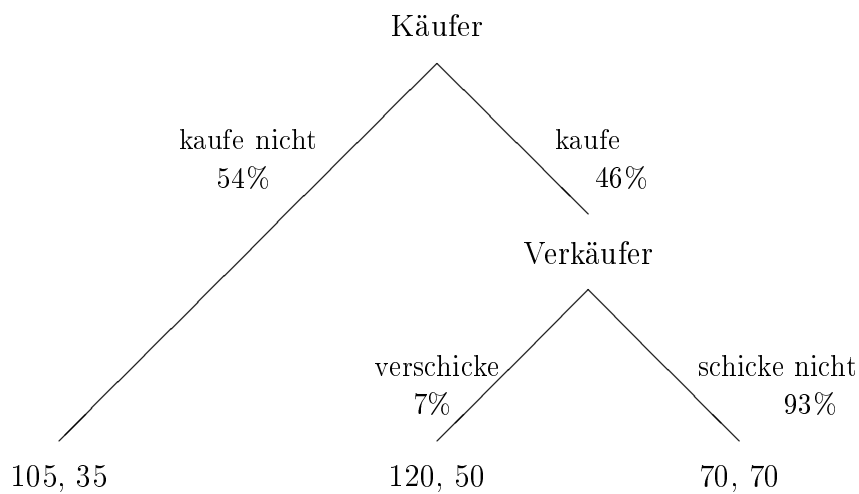
Quelle: Bolton, Katok, Ockenfels (Bolton, Katok, and Ockenfels, 2004)

Interessanterweise verhalten sich immerhin 37% der Verkäufer ehrlich, und 27% der Käufer sind bereit, einem Verkäufer zu vertrauen. Das Verhalten der Verkäufer ist unter keinen Umständen mehr mit dem Menschenbild des rationalen Nutzenmaximierers zu vereinbaren. Das Käuferverhalten könnte man dagegen noch gewaltsam für rational egoistisch erklären, wenn man 27% der Käufer unterstellt, dass sie davon ausgehen, dass die Verkäufer nicht egoistisch rational sondern ehrlich sind. Aber wenn man schon zugesteht, dass nicht alle Verkäufer sich rational egoistisch verhalten, warum sollte man bei den Käufern noch Deutungsanstrengungen unternehmen, nur um die Prämisse des rationalen Egoismus zu retten. Kurz, die einzig plausible Erklärung für das experimentelle Ergebnis besteht darin, dass es eben eine signifikante Abweichung vom rationalen Egoismus gibt.

Aber welche Gründe könnten zu dieser Abweichung führen? Denkbar wären unter anderem folgende Motive:

- Ein gewisser Anteil der Akteure handelt im Sinne *reziproker* Gerechtigkeitsvorstellungen. Präziser: Ein gewisser Anteil der Verkäufer handelt reziprozitätsorientiert und ein gewisser Anteil der Käufer erwartet Reziprozität vom Verkäufer.
- Wenigstens einige der Akteure handeln *effizienzorientiert*. Bei wechselseitiger Kooperation können Käufer und Verkäufer gemeinsam am meisten erwirtschaften.
- Ein gewisser Anteil der Verkäufer handelt *gleichheitsorientiert*, d.h. ein Ergebnis wird dann als gerecht empfunden, wenn es zu einer möglichst ausgeglichenen Verteilung führt. Für die Käufer kann Gleichheit alleine kein Motiv sein, da sie dieses Ziel ja auch ohne auf den Handel einzugehen erreichen könnten. Aber Gleichheit könnte neben z.B. einer schwachen Gewinnorientierung eine Rolle spielen.
- Der Vollständigkeit halber sollte auch *gewinnorientiertes* Handeln noch einmal erwähnt werden. Immerhin weicht ja jeweils nur eine Minderheit vom Gleichgewichtspfad ab.

Wie kann man aber überprüfen, welches dieser möglichen Motive das ausschlaggebende ist? Eine Möglichkeit besteht darin, das selbe Spiel mit leicht veränderten Auszahlungsparametern noch einmal durchzuspielen (mit anderen Versuchspersonen, wie sich versteht). Bei dem folgenden Spiel wurde einfach auf alle Auszahlungen des Käufers ein Wert von 70 aufaddiert. Die strategische Situation (im Sinne der Spieltheorie) bleibt dabei genau dieselbe. Immer noch handelt es sich um ein Vertrauensspiel und immer noch besteht das Nash-Gleichgewicht darin, dass kein Handel statt findet. Interessanterweise ändert sich das Verhalten der Versuchspersonen aber schlagartig:



Quelle: Bolton, Katok, Ockenfels (Bolton, Katok, and Ockenfels, 2004)

Wie man sieht, ist die Zahl der ehrlichen Verkäufer auf einen kümmerlichen Rest von 7% zusammengeschrunft. Gleichzeitig aber, und das ist vielleicht noch überraschender, ist die Zahl der willigen Käufer sehr deutlich auf 46% gestiegen. Unterstellt man, dass sich die Käufer auch nur halbwegs in die Verkäufer einfühlen können, dann hieße dies, dass sich ein großer Teil der Käufer auf den Handel nur einlässt, um dem Verkäufer Gelegenheit zu geben, dessen bevorzugtes Ergebnis herzustellen.

Was ist aber das bevorzugte Ergebnis? Egoistische Nutzenmaximierung taugt immer noch als Erklärung für die Mehrzahl der Käufer, aber wie kommt die Abweichung zu Stande, die noch größer ist als im ersten Experiment? Reziprozität scheidet als Motiv offensichtlich aus, da kaum einer der Verkäufer sich reziprok verhält. Dasselbe gilt für eine unterstellte kollektive Effizienzorientierung, die zu demselben Ergebnis führen müsste wie Reziprozität als Handlungsmotiv.

Die beste Erklärung für die Abweichung (wohlbemerkt nicht für das Handeln aller oder auch nur für den Durchschnittstypus) ist eine verbreitete Gleichheitsorientierung der Akteure, denn nur der Pfad Kaufen->Betrügen führt mit diesen Auszahlungen zu einem ausgeglichenen Ergebnis.

Was lernen wir nun aus alldem über die Spieltheorie? Das Beispiel zeigt, dass man spieltheoretische Modellvorstellungen, wie in diesem Fall das Vertrauensspiel auch dann noch fruchtbar einsetzen kann, wo menschliches Verhalten vom *homo oeconomicus* Modell abweicht. Spieltheoretische Modelle erlauben die begrifflich prägnante Beschreibung strategischer Probleme, und

das spieltheoretische Experiment erlaubt es das tatsächliche Verhalten von Menschen mit dem Modell des rationalen Akteurs zu kontrastieren und bis zu einem gewissen Grade auch die Gründe (d.h. die Motive) für Abweichungen zu bestimmen.

Allerdings sind auch einige Einschränkungen zu beachten: So gilt, dass das, was im Experiment gezeigt wurde, zunächst einmal nur für die Experimentalsituation selbst. Ob und auf welche Realweltsituationen man den Experimentalbefund übertragen kann, bleibt zunächst eine durchaus offene Frage. Und auch nach welcher Methode man diese Frage angehen soll, ist durchaus nicht leicht zu beantworten, da man dazu ja nicht wiederum Experimente (ad infinitum) anstellen kann. Dass dieses Übertragungsproblem durchaus ernst genommen werden sollte, kann folgende Überlegung plausibel machen. Denkbar ist etwa, dass die signifikante Gleichheitsorientierung, die das 2.Experiment nahelegt, in gewisser Weise nur ein Artefakt der Experimentalsituation ist. Etwa so: Alle Teilnehmer fühlen sich im Experiment in einer Ausnahmesituation. Das stiftet eine gewisse Solidarität, die wiederum zu einem stärker gleichheitsorientierten Verhalten führt. In einer „realen“ Marktsituation wäre das möglicherweise ganz anders...

### 5.2.5 Aufgaben

1. Stellen Sie das Vertrauensspiel als Tabelle dar.
2. Zeige: Im 2-Personen Hirschjagdspiel gibt es kein gemischtes Gleichgewicht:

	Hirsch	Hase
Hirsch	5, 5	0, 2
Hase	2, 0	2, 2

3. Zeige, dass im 2-Personen Spiel mit zwei Handlungsoptionen gilt:
  - (a) Die beste Antwort auf eine reine Strategie ist immer eine reine Strategie, sofern zwischen den möglichen Antworten in reinen Strategien nicht Indifferenz herrscht.
  - (b) Sei  $(Z; S)$  ein Gleichgewicht der Strategien  $Z$  und  $S$ , und sei  $Z$  eine gemischte Strategie, dann muss auch  $S$  eine gemischte Strategie sein, es sei denn Spieler 1 () ist indifferent zwischen seinen möglichen reinen Antwortstrategien.
  - (c) Sei  $(Z; S)$  ein Gleichgewicht und  $Z$  eine gemischte Strategie, aber  $S$  eine reine Strategie, dann ist auch  $(x; S)$  ein Gleichgewicht für jede beliebige reine oder gemischte Strategie  $x$ .
  - (d) Gib ein Beispiel in Form einer Spielmatrix für den vorhergehenden Fall an.
4. Berechne das gemischte Gleichgewicht im Angsthasenspiel:

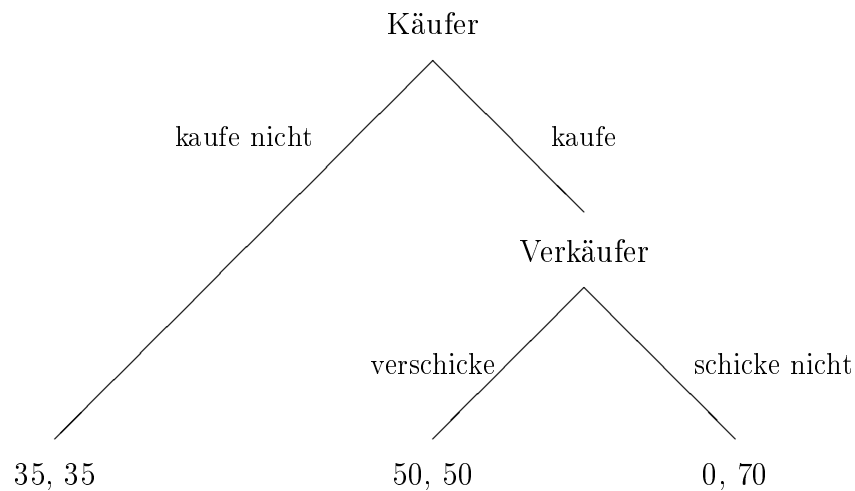
	Ausweichen	Gas geben
Ausweichen	0, 0	-5, 5
Gas geben	5, -5	-100, -100

Zusatzfrage: Wie wirkt es sich auf die Gleichgewichte aus, wenn man das Angsthasenspiel folgendermaßen abändert?

	Ausweichen	Gas geben
Ausweichen	0, 0	-5, 5
Gas geben	5, -5	$-\infty, -\infty$

5. Zeige: Im wiederholten Gefangenendilemma mit den Parametern  $T, R, P, S = 5, 3, 1, 0$  beträgt die zu erwartende Auszahlung von *TitForTat* gegen die Strategie *Random* 2.25.

6. Welche Strategie ist im wiederholten Gefangenendilemma die beste Antwort auf *Random*?
7. Gib zwei Strategien  $A$  und  $B$  an, für die gilt:
  - (a) Die direkte Begegnung von  $A$  und  $B$  geht immer zugunsten von  $B$  aus, d.h.  $V(B/A) > V(A/B)$
  - (b)  $B$  kann trotzdem nicht in eine Population von  $A$  eindringen.
8. Zeige: Die Strategie *Tit For Two Tats* (Bestrafe erst bei zwei Defektionen) ist nicht kollektiv stabil. Es genügt dafür eine Strategie anzugeben, die in eine Population von *Tit For Two Tat*-Spielern eindringen kann.
9. Zeige: Die Strategie *Grim* (siehe Seite 245) ist kollektiv stabil aber nicht evolutionär stabil.
10. In welchem Verhältnis stehen die Begriffe der *kollektiven Stabilität* und der *evolutionären Stabilität* zu dem des Nash-Gleichgewichts?
11. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss der Verkäufer mindestens ehrlich sein, damit sich das Geschäft für den Käufer in dem folgenden Vertrauensspiel lohnt?



Quelle: Bolton, Katok, Ockenfels (Bolton, Katok, and Ockenfels, 2004)

# Kapitel 6

## Kritische Reflexion

### 6.1 Wissenschaftskritische Diskussion der Reichweite und Grenzen der formalen Entscheidungstheorie in der Philosophie

Kommt noch...





# Kapitel 7

## Beispielklausur

(im Augenblick nicht mehr aktuell!!!)

### 7.1 Klausurvorbereitung und Klausur

#### 7.1.1 Aufgaben zur Klausurvorbereitung

Hier sind ein par Aufgaben von der Art, wie sie in der Klausur vorkommen werden.

#### Entscheidungen unter Unwissenheit

1. Betrachte folgende Entscheidungstabellen:

Tabelle 1:					Tabelle 2:				
$A_1$	4	8	12	0	$A_1$	0	-1	2	5
$A_2$	3	2	3	3	$A_2$	-3	12	2	4
$A_3$	1	5	14	6	$A_3$	1	8	-2	6
$A_4$	2	3	1	7	$A_4$	2	5	1	0

Löse beide Entscheidungstabellen:

- (a) nach der (lexikalischen) Maximin-Regel
- (b) nach der (lexikalischen) Minimax-Bedauerns-Regel
- (c) nach dem Indifferenzprinzip
- (d) nach der Optimismus-Pessimismus-Regel mit einem Optimismus-Index von  $3/4$

2. Welche der folgenden Nutzenfunktionen beschreiben jeweils denselben *ordinalen* Nutzen und welche denselben *kardinalen* Nutzen:

	Gut:	A	B	C	D	E	F
(a)	$u_1$ :	3	2	5	8	1	4
	$u_2$ :	6	4	8	16	2	7
	$u_3$ :	7	4	13	22	1	10

(b)  $u_1(x) = 2x \quad u_2(x) = -x \quad u_3(x) = x^2 \quad u_4(x) = 5x^2 - 3$

### Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Ein Patient, der kürzlich einen Urlaub in Zentralafrika verbracht hat, wird mit Verdacht auf Malaria in die Klinik eingeliefert. Es ist bekannt, dass etwa bei 0.5% derartiger Verdachtsfälle tatsächlich eine Malariaerkrankung auftritt. Die behandelnde Ärztin führt zunächst einen Antigen-Schnelltest durch. Dieser Schnelltest hat eine positiv-positiv Rate von 80% und eine positiv-negativ Rate von 0.01%. Der Test fällt *negativ* aus.

Da der Schnelltest nicht besonders sensitiv ist (wie man an der niedrigen positiv-positiv Rate sieht), führt die Ärztin noch einen zweiten Test auf Basis einer Polymerase-Kettenreaktion durch. Dieser Test, der mit einer positiv-positiv Rate von 99,5% und einer positiv-negativ Rate von 0.3% sehr viel zuverlässiger ist, fällt positiv aus.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss die Ärztin davon ausgehen, dass der Patient an Malaria erkrankt ist?

2. Die Laplace'sche Wahrscheinlichkeit wird wie folgt definiert:
- (a) Es gibt eine endliche Menge von Elementarereignissen:  $\Omega$ . (Beispiel: Beim Würfeln  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ )
  - (b) Jedes Ereignis ist durch eine Menge  $E$  charakterisiert, die Teilmenge von  $\Omega$  ist:  $E \subseteq \Omega$ . (Beispiel: Das Ereignis, eine gerade Zahl zu würfeln, wird durch die Menge  $E = \{2, 4, 6\}$  beschrieben.)
  - (c) Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist definiert als die Anzahl der Elemente der Ereignismenge („günstige Fälle“) geteilt durch die Anzahl der Elementarereignisse („mögliche Fälle“). Wenn  $|M|$  die Anzahl der Elemente der Menge  $M$  beschreibt, dann ist die Wahrscheinlichkeit  $p$  also definiert durch:  $p(E) := \frac{|E|}{|\Omega|}$ .

*Beweise*, dass die Laplace'sche Wahrscheinlichkeit die kolmogorowschen Axiome erfüllt:

- (a) Axiom:  $\forall_{E \subset \Omega} \quad p(E) \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad p(E) \geq 0$
  - (b) Axiom:  $p(\Omega) = 1$
  - (c) Axiom:  $\forall_{E, F \subset \Omega} \quad E \cap F \neq \emptyset \Rightarrow p(E \cup F) = p(E) + p(F)$
3. Zeige, dass aus den drei kolmogorowschen Axiomen, die *Monotonie* von Wahrscheinlichkeiten folgt:

$$\forall_{E, F \subset \Omega} \quad E \subset F \Rightarrow p(E) \leq p(F)$$

### Entscheidungen unter Risiko

1. In Amerika ist eine Grippewelle ausgebrochen. Experten rechnen damit, dass die Grippewelle mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% auch Deutschland erreicht. Wenn sie Deutschland erreicht, dann erkrankt ein Anteil von 15% der Bevölkerung. Wird die Grippe nicht behandelt, so sterben 3% der Erkrankten.

Die Gesundheitsministerin erwägt nun, ein breit angelegtes Impfprogramm für die gesamte Bevölkerung durchführen zu lassen. Wird die Impfung frühzeitig verabreicht, so senkt sie das Erkrankungsrisiko auf 2%. Allerdings ist die Impfung nicht ganz ohne Risiko, denn es kommt – geheim gehaltenen Zahlen zufolge – bei 0.2% der geimpften Personen zu schweren Komplikationen, die zum Tod führen.

Wenn die Grippe bereits ausgebrochen ist, kann die Gesundheitsministerin immer noch die Entscheidung treffen, eine Impfung durchführen zu lassen, falls das nicht schon vorher geschehen ist. Allerdings ist die Impfung zu diesem späteren Zeitpunkt nicht mehr so effektiv. Sie senkt das Erkrankungsrisiko dann nur noch auf 10% bei gleichem Risiko von Komplikationen.

Aufgaben:

- (a) Stelle das Entscheidungsproblem als Entscheidungsbaum dar.
- (b) Sollte die Gesundheitsministerin eine frühzeitige Durchführung des Impfprogramms anstreben?
- (c) Angenommen es hätte im Vorfeld eine öffentliche Diskussion über die Risiken des Impfprogramms gegeben, so dass die Durchführung des Impfprogramms zu einem frühen Zeitpunkt, als noch nicht klar war, ob sie Deutschland überhaupt erreicht, politisch nicht durchsetzbar war. Angenommen weiterhin, die Grippewelle hat Deutschland schließlich dennoch erreicht und der Ruf nach einer schleunigen Massenimpfung wird laut. Sollte die Gesundheitsministerin jetzt doch noch das Impfprogramm durchführen?

2. Für eine auf einer Menge von Lotterien definierte Präferenzrelation gilt neben den üblichen Ordnungsgesetzen von Präferenzrelationen u.a.:

- (a) *Bedingung der höheren Gewinne*: Für beliebige Lotterien  $x, y$  und  $L^*$  und jede beliebige Wahrscheinlichkeit  $a$  gilt:
- i.  $L^* \succ x$  genau dann wenn  $L(a, L^*, y) \succ L(a, x, y)$ .
  - ii.  $L^* \succ y$  genau dann wenn  $L(a, x, L^*) \succ L(a, x, y)$ .
- (b) *Reduzierbarkeit zusammengesetzter Lotterien*: Für jede zusammengesetzte Lotterie der Form  $L(a, L(b, x, y), L(c, x, y))$  gilt  $L(a, L(b, x, y), L(c, x, y)) \sim L(d, x, y)$  mit  $d := ab + (1 - a)c$ .

*Zeige* allein mit Hilfe dieser beiden Bedingungen (und der Ordnungsgesetze für Präferenzrelationen):

- (a) Es kann *nicht* gelten:  $L(a, x, x) \succ x$
  - (b) Es kann *nicht* gelten:  $x \succ L(a, x, x)$
3. Nimm weiterhin folgende Bedingungen als gegeben an (ergibt sich aus der vorhergehenden Aufgabe): Für alle Wahrscheinlichkeiten  $a$  und alle Lotterien  $x$  gilt:  $L(a, x, x) \sim x$

*Zeige* allein mit dieser und den Bedingungen aus der vorhergehenden Aufgabe: Wenn  $B$  ein bestes Grundgut ist, dann kann es keine Lotterie  $L(a, x, y)$  geben für die gilt:  $L(a, x, y) \succ B$

### Spieltheorie

1. Löse das folgende Spiel durch sukzessive Dominanz (Gib dazu in der richtigen Reihenfolge die zu streichenden Zeilen- bzw. Spaltenstrategien an):

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$Z_1$	4	2	0	14
$Z_2$	11	7	1	12
$Z_3$	9	6	4	5
$Z_4$	3	4	2	8

2. Gegeben seien diese beiden Spiele:

Spiel A			Spiel B		
	$S_1$	$S_2$		$S_1$	$S_2$
$Z_1$	2, 1	0, 0	$Z_1$	0, 0	-1, 1
$Z_2$	-1, -2	1, 3	$Z_2$	1, -1	-2, -2

Aufgaben:

- (a) Bestimme zu jedem Spiel:
  - i. die *reinen* Nash-Gleichgewichte (sofern vorhanden).
  - ii. die *gemischten* Nash-Gleichgewichte (sofern vorhanden).
- (b) Bestimme den Erwartungswert der Spiele für jeden Spieler in den gemischten Gleichgewichten.

### 7.1.2 Die Klausur

#### Aufgabe: Entscheidungen unter Unwissenheit

Lösen Sie nach der Minimax-Bedauerns-Regel. Stellen Sie dazu die Bedauernstabelle auf und geben Sie dann an, welche drei Handlungen  $A_1$ ,  $A_2$  oder  $A_3$  gewählt werden sollte.

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$A_1$	3	7	500	4
$A_2$	200	100	3	50
$A_3$	150	60	2	25

#### Aufgabe: Entscheidungsbäume

Eine Person steht vor einem Entscheidungsproblem, das durch den Entscheidungsbaum *auf der letzten Seite* dargestellt wird:

1. Sollte die Person an dem weiter rechts liegenden der beiden Entscheidungsknoten besser „Handlung A“ oder „Handlung B“ wählen?
2. Wie groß ist der Erwartungswert von „Alternative 1“ (am ersten Entscheidungsknoten von links)?
3. Sollte die Person „Alternative 1“ oder „Alternative 2“ wählen?

(Nehmen Sie dabei an, dass die Person sich rational verhält und den Wert von zufälligen Ereignissen immer nach dem Erwartungsnutzenprinzip berechnet.)

#### Aufgabe: Nash-Gleichgewichte

Gegeben sei folgendes Zwei-Personen Spiel:

	$S_1$	$S_2$
$Z_1$	1, 1	2, 0
$Z_2$	0, 2	4, 4

1. Geben Sie alle *reinen* Nash-Gleichgewichte des Spiels an.
2. Berechnen Sie das *gemischte* Nash-Gleichgewicht. Geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Zeilenspieler im gemischten Gleichgewicht  $Z_1$  spielt, und mit welcher Wahrscheinlichkeit der Spaltenspieler im gemischten Gleichgewicht  $S_1$  spielt.

**Aufgabe: Bayes'scher Lehrsatz**

Ein Bergbau-Unternehmen möchte in Sibirien Gold abbauen. Experten schätzen, dass in dem dafür vorgesehenen Gebiet mit einer Wahrscheinlichkeit von **30%** reiche Goldvorkommen zu finden sind. Bevor das Unternehmen jedoch eine Abbau-Konzession von der Regierung erwirbt, hat es sich das Recht vorbehalten, Probegrabungen durchzuführen. Falls tatsächlich Goldvorkommen vorhanden sind, dann liefern die Probegrabungen mit **95%** Wahrscheinlichkeit ein positives Ergebnis. Allerdings liefern sie mit **10%** Wahrscheinlichkeit auch dann ein positives Ergebnis, wenn in Wirklichkeit kein Gold vorhanden ist.

**Aufgabe:** Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann noch davon ausgegangen werden, dass Gold vorhanden ist, wenn die Probegrabungen ein *negatives* Ergebnis liefern? Stellen Sie zur Lösung der Aufgabe die entsprechende Rechnung mit Hilfe des Bayes'schen Lehrsatzes auf, und rechnen Sie dann die Lösung aus.

**Aufgabe: Beweise**

1. Es seien  $x$  und  $y$  zwei Güter oder Lotterien mit  $x \not\succ y$ . Für welche Wahrscheinlichkeit  $b$  gilt dann:  $L(a, x, y) \equiv L(b, y, x)$ ? Mit anderen Worten: Für welchen Wert von  $b$  sind die beiden Lotterien über dieselben Güter, aber in umgekehrter Reihenfolge identisch?
2. Die *Bedingung der höheren Gewinne* besagt, dass für beliebige Lotterien  $x, y$  und  $z$  und jede beliebige Wahrscheinlichkeit  $a$  gilt:  $x \succ y$  genau dann wenn  $L(a, x, z) \succ L(a, y, z)$ . (Anders gesagt: Eine Lotterie wird dann vorgezogen, wenn man mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf der *ersten* Stelle einen höheren Gewinn erzielen kann, sofern der Gewinn auf der zweiten Stelle derselbe ist.)

**Aufgabe:** Beweisen Sie, dass die Bedingung der höheren Gewinne auch auf der zweiten Stelle gilt, d.h. dass für beliebige Lotterien  $x, y$  und  $z$  und jede beliebige Wahrscheinlichkeit  $a$  gilt:  $x \succ y$  genau dann wenn  $L(a, z, x) \succ L(a, z, y)$ .

(Die Gültigkeit der Bedingung der höheren Gewinne auf der ersten Stelle und Ihr Ergebnis der ersten Aufgabe dürfen Sie dabei voraussetzen, aber *nicht* den Erwartungsnutzen!)

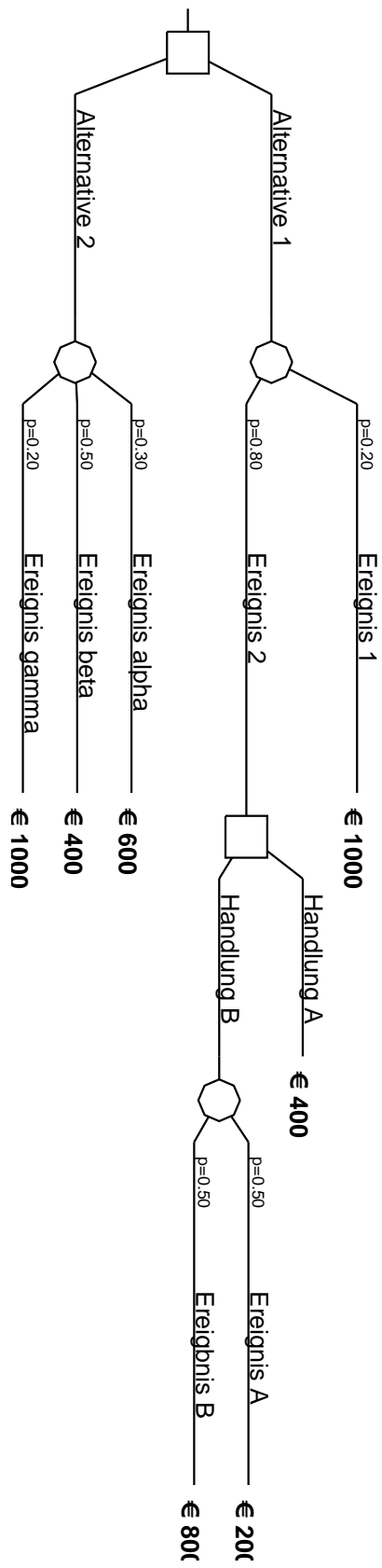


Abbildung 7.1: Der Entscheidungsbaum zu Aufgabe 7.1.2.



### 7.1.3 Die Lösung

#### Aufgabe: Entscheidungen unter Unwissenheit

Bedauernstabelle:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$A_1$	<b>197</b>	93	0	46
$A_2$	0	0	<del>497</del>	0
$A_3$	50	40	<del>498</del>	25

Lösung:  $A_1$  sollte gewählt werden, da bei  $A_1$  der maximale Gewinn, der entgehen könnte, mit 197 kleiner ist als bei  $A_2$  mit 497 und  $A_3$  mit 498.

#### Entscheidungsbäume

1. Für den Erwartungswert der „Handlung B“ gilt:  $EW = 0.5 \cdot 200 + 0.5 \cdot 800 = 500 \text{ €}$ . Da die „Handlung A“ nur 400 € liefert, würde eine rational handelnde Person die „Handlung B“ wählen.
2. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Personen von den beiden Handlungen des rechten Entscheidungsknotens die bessere wählt. Damit hat „Ereignis 1“, wenn es eintritt, einen Wert von 500 € (siehe die erste Aufgabe). Der Erwartungswert der „Alternative 1“ des linken Entscheidungsknotens berechnet sich dann wie gehabt:  $EW = 0.2 \cdot 1000 + 0.8 \cdot 500 = 600 \text{ €}$
3. Um diese Frage zu beantworten, muss nur noch der Erwartungswert von „Alternative 2“ berechnet werden:  $EW = 0.3 \cdot 600 + 0.5 \cdot 400 + 0.2 \cdot 1000 = 580 \text{ €}$ . Da die „Alternative 1“ einen höheren Erwartungswert hat, sollte „Alternative 1“ gewählt werden.

#### Nash-Gleichgewichte

1. Die beiden reinen Nash-Gleichgewichte sind  $(Z_1, S_1)$  und  $(Z_2, S_2)$ . Weder der Zeilen- noch der Spaltenspieler kann sich im Gleichgewicht durch einen Wechsel seiner Strategie noch verbessern, wenn der andere Spieler seine Strategie beibehält.
2. Ansatz: Ein gemischtes Gleichgewicht kann nur dann vorkommen, wenn der jeweils andere Spieler bezüglich der gemischten Gleichgewichtsstrategie seines Gegenüber indifferent zwischen seinen reinen Strategien ist. Sei  $a$  die Wahrscheinlichkeit, mit der der Zeilenspieler die erste seiner

beiden Strategien  $Z_1$  spielt. Dann errechnet sich die Auszahlung, die der Spaltenspieler erhält, wenn er die Strategie  $S_1$  spielt nach:

$$V(S_1) = a \cdot 1 + (1 - a) \cdot 2$$

Und die Auszahlung, die er erhält, wenn er  $S_2$  spielt, ist:

$$V(S_2) = a \cdot 0 + (1 - a) \cdot 4$$

Durch Gleichsetzen erhält man:

$$a \cdot 1 + (1 - a) \cdot 2 = (1 - a) \cdot 4 \quad (7.1.1)$$

$$-a + 2 = 4 - 4a \quad (7.1.2)$$

$$3a = 2 \quad (7.1.3)$$

$$a = \frac{2}{3} \quad (7.1.4)$$

Im gemischten Gleichgewicht wird der Zeilenspieler also mit  $2/3$  Wahrscheinlichkeit  $Z_1$  spielen und mit  $1/3$  Wahrscheinlichkeit  $Z_2$ . Wegen der Symmetrie des Spiels spielt der Spaltenspieler mit genau denselben Wahrscheinlichkeiten, nämlich mit  $2/3$  Wahrscheinlichkeit  $S_1$  und mit  $1/3$  Wahrscheinlichkeit  $S_2$ .

### Aufgabe: Bayes'scher Lehrsatz

Sei  $p$  das Ereignis, dass die Probegrabung erfolgreich ausfällt und  $g$  das Ereignis, dass Gold vorhanden ist. Berechnet werden soll die Wahrscheinlichkeit, dass Gold vorhanden ist, wenn die Probegrabung negativ ausfällt, d.h.  $P(g|\neg p)$ . Nach dem Bayes'schen Lehrsatz gilt:

$$P(g|\neg p) = \frac{P(\neg p|g)P(g)}{P(\neg p|g)P(g) + P(\neg p|\neg g)P(\neg g)}$$

Aus der Aufgabenstellung geht unmittelbar nur hervor, dass  $P(g) = 0.3$ ,  $P(p|g) = 0.95$  und  $P(p|\neg g) = 0.1$ . Alle anderen benötigten Werte muss man aus diesen gegebenen Werten berechnen, also:

$$P(\neg g) = 1 - P(g) = 1 - 0.3 = 0.7$$

$$P(\neg p|g) = 1 - P(p|g) = 1 - 0.95 = 0.05$$

$$P(\neg p|\neg g) = 1 - P(p|\neg g) = 1 - 0.1 = 0.9$$

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$P(g|\neg p) = \frac{0.05 \cdot 0.3}{0.05 \cdot 0.3 + 0.9 \cdot 0.7} = 0.023256$$

Die Lösung lautet also, dass nur noch mit ca. 2,3% Wahrscheinlichkeit davon ausgegangen werden kann, dass Gold vorhanden ist, wenn die Probegrabung negativ ausfällt.

**Aufgabe: Beweise**

1.  $L(a, x, y) \equiv L(b, y, x)$  wenn  $b = 1 - a$ . Begründung: Wenn  $b = 1 - a$ , dann kann man in beiden Lotterien mit genau denselben Gewinnchancen dieselben Gewinne bekommen. Damit sind die Lotterien aber identisch.

*Anmerkung:* Man kann in diesem Fall schon deshalb nicht mit dem Erwartungsnutzen argumentieren, weil damit höchstens die Indifferenz zwischen beiden Lotterien gezeigt werden kann, aber noch nicht ihre Identität. (Wenn der Erwartungsnutzen von einem Apfel für eine bestimmte Person derselbe ist wie der von einer Birne, dann ist die Person zwischen Apfel und Birne indifferent, aber deshalb ist ein Apfel noch lange keine Birne!)

2. Nach dem ersten Teil der Aufgabe ist die Lotterie  $L(a, z, x)$  identisch mit der Lotterie  $L(1 - a, x, z)$  und die Lotterie  $L(a, z, y)$  identisch mit der Lotterie  $L(1 - a, y, z)$ .

Nun gilt aber: Für jedes  $a$  mit  $0 \leq a \leq 1$  liegt der Wert  $1 - a$  wieder in dem Intervall von 0 bis 1. Dann gilt aber nach der Bedingung der höheren Gewinne auf der ersten Stelle (Voraussetzung):

$$x \succ y \Leftrightarrow L(1 - a, x, z) \succ L(1 - a, y, z)$$

Aufgrund der oben festgestellten Identität gilt aber ebenfalls:

$$L(1 - a, x, z) \succ L(1 - a, y, z) \Leftrightarrow L(a, z, x) \succ L(a, z, y)$$

Damit gilt insgesamt:

$$x \succ y \Leftrightarrow L(a, z, x) \succ L(a, z, y)$$

q.e.d.

*Anmerkung:* Wichtig ist, dass der Beweis so geführt wird, dass klar ist, dass die Formel am Ende auch tatsächlich für alle  $a$  gilt!

## 7.2 Literatur

# Literaturverzeichnis

- AXELROD, R. (1984): *Die Evolution der Kooperation*. R. Oldenbourg Verlag, deutsche Übersetzung, 5. auflage (2000) edn.
- BINMORE, K. (1994): *Game Theory and the Social Contract I. Playing Fair*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts / London, England, fourth printing (2000) edn.
- (1998): *Game Theory and the Social Contract II. Just Playing*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts / London, England.
- BOLTON, G. E., E. KATOK, AND A. OCKENFELS (2004): “Trust among Internet Traders: A Behavioural Economics Approach,” *Analyse und Kritik*, 26, 185–202.
- BOSCH, K. (1999): *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*. viewweg Verlag, Braunschweig, 7. auflage (zuerst: 1976) edn.
- CARTWRIGHT, N. (1999): *The Dappled World. A Study of the Boundaries of Science*. Cambridge University Press, Cambridge.
- COX, G. W. (1999): “The Empirical Content of Rational Choice Theory. A Reply to Green and Shapiro,” *Journal of Theoretical Politics*, 11(2), 147–169.
- DE CRISTOFARO, R. (2008): “A new formulation of the Principle of Indifference,” *Synthese*, 163, 329–339.
- DELONG, H. (1991): *A Refutation of Arrow’s Theorem*. University Press of America, Laham, New York, London.
- DUGATKIN, L. A. (1997): *Cooperation among Animals*. Oxford University Press.
- DUPRÉ, J. (2001): *Human Nature and the Limits of Science*. Oxford University Press, Oxford.

- FRITZ, J. (2002): "Experimentelle Untersuchung zum Framing – Effekt in der Entscheidungsforschung: Ein Vergleich zwischen Laborexperimenten und einer Datenerhebung im Internet," Master's thesis, Martin-Luther-Universität-Halle-Wittenberg.
- GEANAKOPOLOS, J. (2001): "Three Brief Proofs of Arrow's Impossibility Theorem," Cowles Foundation Discussion Papers 1123R3, Cowles Foundation, Yale University.
- GILLIES, D. (2000): *Philosophical Theories of Probability*. Routledge.
- GREEN, D. P., AND I. SHAPIRO (1994): *Pathologies of Rational Choice Theory. A Critique of Applications in Political Science*. Yale University Press, New Haven and London.
- HAMMERSTEIN, P. (2003): "Why Is Reciprocity So Rare in Social Animals? A Protestant Appeal," in *Genetic and Cultural Evolution*, ed. by P. Hammerstein, chap. 5, pp. 83–94. MIT Press in cooperation with Dahlem University Press, Cambridge, Massachusetts / London, England.
- HARSANYI, J. (1980): *Can the Maximin Principle Serve as a Basis for Morality? A Critique of John Rawls's Theory* vol. Essays on ethics, social behavior, and scientific explanation, chap. IV, pp. 37–63. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- HILLERBRAND, R. (2006): *Technik, Ökologie und Ethik*. mentis, Paderborn.
- HOFFMANN, R. (2000): "Twenty Years on: The Evolution of Cooperation Revisited," *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, Volume 3, No. 2, –.
- HOWSON, C. (2000): *Hume's Problem. Induction and the Justification of Belief*. Oxford University Press, Oxford.
- KAPLAN, M. (1996): *Decision Theory as Philosophy*. Cambridge University Press.
- KLIEMT, H., AND B. LAHNO (2005): *Methoden der Moralwissenschaften. Teil 1. Nicht-strategische Modelle der Moralwissenschaften. Kapitel 2. Individuelle und Kollektive Wertordnungen*. unveröffentlichtes Vorlesungsskript.
- KLÖPPEL, S., C. M. STONNINGTON, C. CHU, B. DRAGANSKI, R. I. SCAHILL, J. D. ROHRER, N. C. FOX, C. R. J. JR, J. ASHBURNER, AND R. S. J. FRACKOWIAK (2008): "Automatic classification of MR scans in Alzheimer's disease," *Brain. A Journal of Neurology*, 131, 681–689.

- MACKIE, G. (2003): *Democracy Defended*, Contemporary Political Theory. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- MAS-COLELL, A., M. D. WHINSTON, AND J. R. GREEN (1995): *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, Oxford / New York.
- MILINSKI, M. (1987): "TIT FOR TAT in sticklebacks and the evolution of cooperation," *nature*, 325, January, 433–435.
- MUELLER, D. C. (2003): *Public Choice III*. Cambridge University Press.
- MYERSON, R. B. (2002): *Game Theory. Analysis of Conflict*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, fifth printing (first: 1991) edn.
- NIDA-RÜMELIN, J. (1991): "Zur Philosophie der Demokratie: Arrow-Theorem, Liberalität und strukturelle Normen," *Analyse und Kritik*, 13:2, 184–203.
- OKASHA, S. (2007): "Rational Choice, Risk Aversion, and Evolution," *Journal of Philosophy*, CIV, No 5, 217–235.
- OSBORNE, M. J. (2004): *An Introduction to Game Theory*. Oxford University Press, Oxford.
- PENROSE, R. (2004): *The Road to Reality. A Complete Guide to the Laws of the Universe*. Vintage Random House, London.
- RABIN, M., AND R. H. THALER (2001): "Anomalies. Risk Aversion," *Journal of Economic Perspectives*, 15(1), 219–232.
- RALWS, J. (1971): *Eine Theorie der Gerechtigkeit*. suhrkamp, Frankfurt.
- RESNIK, M. D. (2000): *Choices. An Introduction to Decision Theory*. University of Minnesota Press, 5th ed. (1st: 1987) edn.
- RIKER, W. H. (1988): *Liberalism against Populism*. Waveland Press, Prospect Heights, Illinois.
- SARTORI, G. (1997 (zuerst: 1987)): *Demokratietheorie*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.
- SAVAGE, L. J. (1972): *The Foundations of Statistics*. Dover Publications, New York.
- SCHMIDT, M. G. (2000): *Demokratietheorien*. Leske + Budrich, Opladen.

SCHURZ, G. (2006): *Einführung in die Wissenschaftstheorie*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt.

SHAPIRO, I. (2005): *The Flight from Reality in the Human Sciences*. Princeton University Press, Princeton and Oxford.