

数学新星问题征解

第一期 (2014.4)

第一题: 设 a, b, n 是正整数, $a, b \leq n$. 证明:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C_k^a C_k^b \leq \frac{1}{a+b+1} C_n^a C_n^b.$$

注: 当 $m < k$ 时, 规定 $C_m^k = 0$.

第二题: 设 G 是一个简单图, $\overline{G}$ 是 G 的补图. 已知 G 和 $\overline{G}$ 都是联通的, 求 G 和 $\overline{G}$ 的直径之和的最大值.

注: 图 G 的直径是 G 中任何两点距离的最大者.

第三题: 设 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 是平面上的 n 个单位向量, n 是奇数, 证明: 存在 $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}, i = 1, 2, \dots, n$ 使得

$$\left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i \right| \leq 1.$$

第四题: 对给定的正整数 $n \geq 8$, 证明: 存在正整数的集合 A 使得 $|A| = n$ 且

$$|A - A| < |A + A|.$$

其中 $|A - A| = \{a - b | a \in A, b \in A\}, |A + A| = \{a + b | a \in A, b \in A\}.$