Теоретическое задание №1

№1

$\nabla_{X_0} tr(AX^2BX^{-T})$ - ?

$$\left[D_{X_0} tr(AX^2BX^{-T})\right](H) = tr(A\left[D_{X_0} X^2BX^{-T}\right](H)) =$$

$$= tr\left(A\left(HX_0BX_0^{-T} + X_0HBX_0^{-T} + X_0^2B\left[D_{X_0}X^{-T}\right](H)\right)\right) =$$

$$= tr(X_0BX_0^{-T}AH) + tr(BX_0^{-T}AX_0H) + tr\left(AX_0^2B\left(-X_0^{-1}HX_0^{-1}\right)^T\right)$$

$$= \langle (X_0BX_0^{-T}A + BX_0^{-T}AX_0)^T, H\rangle + tr(-X_0^{-1}HX_0^{-1}B^T(X_0^2)^TA^T) =$$

$$= \langle (X_0BX_0^{-T}A + BX_0^{-T}AX_0)^T, H\rangle - tr(X_0^{-1}B^T(X_0^2)^TA^TX_0^{-1}H) =$$

$$= \langle (X_0BX_0^{-T}A + BX_0^{-T}AX_0 - X_0^{-1}B^T(X_0^2)^TA^TX_0^{-1})^T, H\rangle$$

$$\nabla_{X_0} tr(AX^2BX^{-T}) = (X_0BX_0^{-T}A + BX_0^{-T}AX_0)^T - X_0^{-T}AX_0^2BX_0^{-T}$$

№2

$X \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $rk(X) = n$, $\Omega \in \mathbb{R}^{m\times m}$, Ω пол. определена, $W \in \mathbb{R}^{k\times n}$.

Найти $G \in \mathbb{R}^{k\times m}$, для которой $f(G) = tr(G\Omega G^T)$ принимает минимальное значение на подмн-ве, задаваемым $GX = W$

$\triangleright$

Лагранжиан:

$$\mathcal{L}(G) = tr(G\Omega G^T) + \langle \lambda, GX - W \rangle$$

$$[D_G \mathcal{L}](H) = tr(H\Omega G^T) + tr(G\Omega H^T) + \langle \lambda, HX \rangle =$$

$$= tr(\Omega G^T H) + tr(\Omega^T G^T H) + \langle \lambda, HX \rangle =$$

$$= \langle G\Omega^T, H \rangle + \langle G\Omega, H \rangle + \langle \lambda X^T, H \rangle = \langle G(\Omega^T + \Omega) + \lambda X^T, H \rangle$$

$$\begin{cases} \nabla \mathcal{L}(G) = G(\Omega^T + \Omega) + \lambda X^T = 0 \\ GX = W \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G = -\lambda X^T (\Omega^T + \Omega)^{-1} \\ GX = W \end{cases} \Rightarrow W = -\lambda X^T (\Omega^T + \Omega)^{-1} X$$

Заметим, что $A = (\Omega^T + \Omega)^{-1}$ положительно определена как обратная к сумме положительно определенных матриц.

Но тогда $X^T A X$ также положительно определена. Действительно, предположим, что $\exists V \in \mathbb{R}^{n \times 1}: \; V^T X^T A X V \le 0, \; V \ne 0$

Тогда $XV \ne 0$, иначе $rk\, X < n$, и $(XV)^T A (XV) > 0$ т.к. A положительно определена, противоречие.

Значит, $X^T A X$ обратима, и можно выразить λ:

$$\lambda = -W \left(X^T (\Omega^T + \Omega)^{-1} X \right)^{-1}$$

$$\underline{G = W \left(X^T (\Omega^T + \Omega)^{-1} X \right)^{-1} X^T (\Omega^T + \Omega)^{-1},}$$

Проверим, что найденный экстремум является минимумом:

$$[D_G^2 \mathcal{L}](H) = \cancel{}\; H(\Omega^T + \Omega)$$

$\Omega^T + \Omega$ положительно определена, значит G действительно точка минимума

№3

$X_1, \ldots, X_n \quad p(x) = \frac{4x^3}{\theta^4} I[x \in [0, \theta]]$

ано для $\tau(\theta) = \theta^2 + \theta + 1 + \frac{1}{\theta}$, ад - ?

Согласно ЦПТ, $\overline{X}$ - ано EX_1 с ад DX_1

$$EX_1 = \int_0^\theta \frac{4x^4}{\theta^4} dx = \frac{4\theta}{5}$$

$$DX_1 = \int_0^\theta \frac{4x^5}{\theta^4} dx - \left(\frac{4\theta}{5}\right)^2 = \frac{2}{3}\theta^2 - \frac{16\theta^2}{25} = \frac{2\theta^2}{75}$$

Возьмем $f(\theta) = \tau\left(\frac{5}{4}\theta\right)$. Тогда, используя дельта-метод, можем сказать, что $f(\overline{X})$ - ано $f\left(\frac{4\theta}{5}\right)$ с ад

$$DX_1 \left(f' \Big|_{EX_1} \right)^2$$

Поскольку $f\left(\frac{4\theta}{5}\right) = \tau(\theta)$, то $f(\overline{X}) = \frac{25}{16}\overline{X}^2 + \frac{5}{4}\overline{X} + 1 + \frac{4}{5\overline{X}}$

искомая оценка $\tau(\theta)$ с асимптотической дисперсией

$$\frac{2\theta^2}{75} \left(\frac{5}{4} \left(2x \cdot \frac{5}{4} + 1 - \frac{1}{x^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2} \right)_{x = \frac{4\theta}{5}} \right)^2 =$$

$$= \frac{\theta^2}{24} \left(2\theta + 1 - \frac{1}{\theta^2} \right)^2$$

№4

$X_1, \dots, X_n \qquad p_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\alpha} e^{(\beta - x)/\alpha} \; I\{x \geq \beta\}$

$L_x(\alpha,\beta) = \prod_{i=1}^{n} p_{\alpha,\beta}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha} e^{(\beta - x_i)/\alpha} \; I\{x_i \geq \beta\}$

Заметим, что если $\beta > X_{(1)}$, то $L_x = 0$, иначе $L_x > 0$.

Значит, нас интересует только $\beta \leq X_{(1)}$. Тогда

$l_x(\alpha,\beta) = \ln L_x(\alpha,\beta) = \sum_i (\beta - x_i)/\alpha - n \ln \alpha$

$\frac{d l_x}{d\beta} = \frac{n}{\alpha} > 0$

Для максимального правдоподобия возьмем максимальное $\hat{\beta} = X_{(1)}$

$\frac{d l_x}{d\alpha} = \frac{\sum (x_i - \beta)}{\alpha^2} - \frac{n}{\alpha} = 0$

$\hat{\alpha} = \overline{X} - \beta = \overline{X} - x_{(1)}$

Ответ: $\theta = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = (\overline{X} - x_{(1)}, x_{(1)})$

№ 5

$X_1, \dots, X_n \sim Bern(p)$

$\hat{p} = \overline{X} \qquad \tilde{p} = \frac{n\overline{X}+1}{n+2}$

1) $E\hat{p} = EX_1 = p$ — несмещенная

$E\tilde{p} = \frac{np+1}{n+2}$ — смещенная

2) $\frac{np+1}{n+2} \vee p$

$np+1 \vee np+2p$

$\frac{1}{2} \vee p$

Если $p > \frac{1}{2}$, то в меньшую сторону, иначе в большую

3) $MSE_{\hat{p}} = E_p(p-\hat{p})^2 = E_p(E\overline{X}-\overline{X})^2 = D\overline{X} = \frac{DX_1}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$

$MSE_{\tilde{p}} = E_p(p-\tilde{p})^2 = (E\tilde{p}-p)^2 + E(\tilde{p}-E\tilde{p})^2 =$

$= \left(\frac{pn+1}{n+2} - p\right)^2 + D\tilde{p} = \left(\frac{1-2p}{n+2}\right)^2 + \frac{nDX_1}{(n+2)^2} =$

$= \left(\frac{1-2p}{n+2}\right)^2 + \frac{np(1-p)}{(n+2)^2}$

При $n=10$:

$MSE_{\hat{p}} = \frac{p(1-p)}{10}$

$MSE_{\tilde{p}} = \frac{(1-2p)^2 + 10p(1-p)}{144} = \frac{-6p^2+6p+1}{144}$

$MSE_{\hat{p}} \vee MSE_{\tilde{p}}$

$144p - 144p^2 \vee -60p^2+60p+10$

$-84p^2+84p-10 \vee 0$

Если $p \in \left[\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{11}{84}}, \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{11}{84}}\right]$, то с точки зрения MSE $\hat{p}$ лучше, иначе $\hat{p}$ лучше.

№6

Пусть $\theta = (p_1, p_2, p_3)$

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)\,p(\theta)}{p(x)} \propto p(x|\theta)\,p(\theta)$$

По условию $p(\theta) \propto p_1^2 p_2^3 p_3^9$,

$p(x|\theta) = p_1^c p_2^w p_3^h$, где c, w, h — кол-во холодных, теплых и жарких дней в выборке.

Date: ....../....../......

Нужно найти $\hat{\theta} = \arg\max p(\theta|x)$

$$p(\theta|x) \propto p_1^{2+c} p_2^{3+w} p_3^{9+h} = p_1^{2+c} p_2^{3+w} (1-p_1-p_2)^{9+h}$$

- $p'_{p_1} \propto (2+c)p_1^{1+c}(1-p_1-p_2)^{9+h} + p_1^{2+c}(-1)(9+h)(1-p_1-p_2)^{8+h} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2+c)(1-p_1-p_2) - p_1(9+h) = 0$ 1)

- $p'_{p_2} \propto (3+w)p_2^{2+w}(1-p_1-p_2)^{9+h} - (9+h)p_2^{3+w}(1-p_1-p_2)^{8+h} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (3+w)(1-p_1-p_2) - (9+h)p_2 = 0$ 2)

$$1), 2) \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = p_2\dfrac{(2+c)}{3+w} \\ 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \dfrac{2+c}{14+n} \\ p_2 = \dfrac{3+w}{14+n} \\ p_3 = \dfrac{9+h}{14+n} \end{cases}$$

Ответ: $\hat{\theta} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3) = \left(\dfrac{2+c}{14+n}, \dfrac{3+w}{14+n}, \dfrac{9+h}{14+n}\right)$

№7

$x_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $x_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\operatorname{cov}(x_1, x_2) = \gamma$

$E(e^{x_1} | x_1 + x_2 = b)$

Произведем следующие замены:

$x = x_1 - \mu_1$

$y = x_1 + x_2 - \mu_1 - \mu_2$ $a = b - \mu_1 - \mu_2$

Тогда $x \sim N(0, \sigma_1^2)$ $y \sim (0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\gamma)$

$\operatorname{cov}(x, y) = \operatorname{cov}(x_1, x_1 + x_2) = \sigma_1^2 + \gamma$

$$E = E(e^{x+\mu_1} | y = a) = e^{\mu_1} \int e^x p(x | y=a)\, dx$$

$$p(x | y=a) = \frac{p(x, y=a)}{\int p(x, y=a)\, dx}$$

$$p(x, y=a) = C \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{\rho \cdot 2x \cdot a}{\sigma_1 \sigma_y} + \frac{a^2}{\sigma_y^2} \right] \right\} =$$

$$= C \cdot \exp\left\{ \frac{-1}{\sigma_1^2 2(1-\rho^2)} \left[x^2 - \frac{2\rho x a \sigma_1}{\sigma_y} + \left(\frac{a\sigma_1}{\sigma_y}\right)^2 \right] \right\} \quad (1)$$

где $\rho = \operatorname{corr}(x, y) = \frac{\sigma_1^2 + \gamma}{\sigma_1 \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\gamma}} = \frac{\sigma_1^2 + \gamma}{\sigma_1 \sigma_y}$

Представим (1) в виде $C_1 \cdot \exp\left\{ C_2 \left((x + C_3)^2 + C_4 \right) \right\}$

где $C_2 = -\frac{1}{2\sigma_1^2 (1-\rho^2)}$

$C_3 = -\frac{\rho \sigma_1 a}{\sigma_y}$, $C_4 = \left(\frac{a\sigma_1}{\sigma_y}\right)^2 - C_3^2$

Тогда $E = e^{\mu_1} \dfrac{\int c_1 \exp\{x + c_2((x+c_3)^2 + c_4)\} dx}{\int c_1 \exp\{c_2((x+c_3)^2 + c_4)\} dx}$

Преобразуем показатель верхней экспоненты:

$$x + c_2(x^2 + 2xc_3 + c_3^2 + c_4) = c_2\left(x^2 + 2x\left(c_3 + \frac{1}{2c_2}\right) +\right.$$

$$\left. + \left(c_3 + \frac{1}{2c_2}\right)^2 - \left(c_3 + \frac{1}{2c_2}\right)^2 + c_3^2 + c_4\right) =$$

$$= c_2\left(\left(x + c_3 + \frac{1}{2c_2}\right)^2 + c_4 - \frac{c_3}{c_2} - \frac{1}{4c_2^2}\right)$$

Получаем, что $E = e^{\mu_1} \dfrac{e^{c_2\left(c_4 - \frac{c_3}{c_2} - \frac{1}{4c_2^2}\right)}}{e^{c_2 c_4}} =$

$$= \exp\left\{\mu_1 - c_3 - \frac{1}{4c_2}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\mu_1 + \frac{a\sigma_1\rho}{\sigma_y} + \frac{1}{2}\sigma_1^2(1-\rho^2)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\mu_1 + \frac{a(\sigma_1^2 + \gamma)}{\sigma_y^2} + \frac{1}{2}\frac{\left(\sigma_1^2\sigma_y^2 - (\sigma_1^2+\gamma)^2\right)}{\sigma_y^2}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\mu_1 + \frac{2(b - \mu_1 - \mu_2)(\sigma_1^2 + \gamma) + \sigma_1^2\sigma_2^2 - \gamma^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\gamma)}\right\}$$