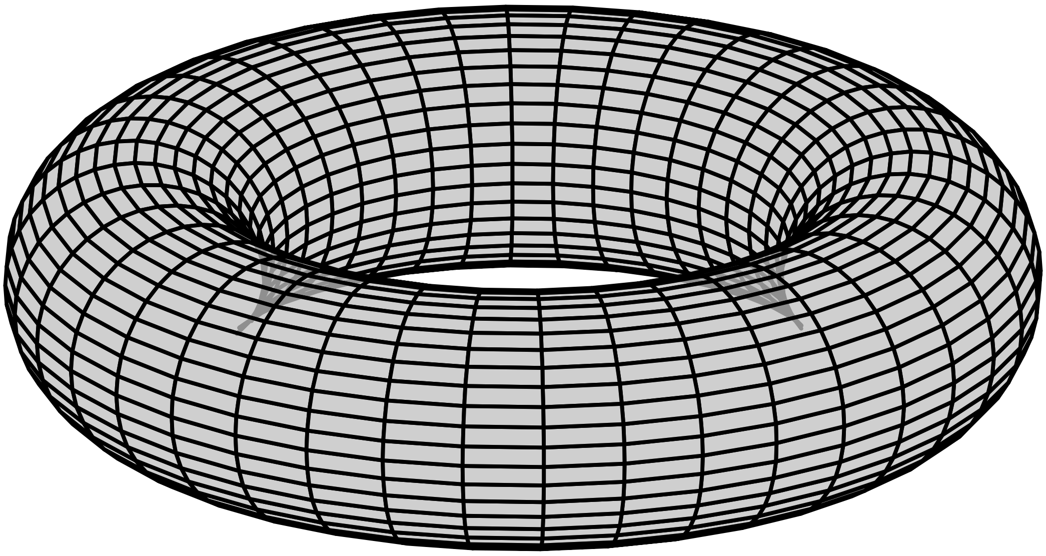
Einführung in die Geometrie und Topologie



0. Auflage, 31. Dezember 2016

Martin Thoma

Vorwort

Dieses Skript wurde im Wintersemester 2013/2014 von Martin Thoma geschrieben. Es beinhaltet die Mitschriften aus der Vorlesung von Prof. Dr. Herrlich sowie die Mitschriften einiger Übungen und Tutorien.

Das Skript ist kostenlos über martin-thoma.com/geotopo verfügbar. Wer es gerne in A5 (Schwarz-Weiß, Ringbindung) für 10 Euro hätte, kann mir eine E-Mail schicken (info@martin-thoma.de).

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. Herrlich für einige Korrekturvorschläge und einen gut strukturierten Tafelanschrieb danken, der als Vorlage für dieses Skript diente. Tatsächlich basiert die Struktur dieses Skripts auf der Vorlesung von Herrn Prof. Dr. Herrlich und ganze Abschnitte konnten direkt mit LaTeX umgesetzt werden. Vielen Dank für die Erlaubnis, Ihre Inhalte in diesem Skript einbauen zu dürfen!

Vielen Dank auch an Frau Lenz und Frau Randecker, die es mir erlaubt haben, ihre Übungsaufgaben und Lösungen zu benutzen.

Jérôme Urhausen hat durch viele Verbesserungsvorschläge und Beweise zu einer erheblichen Qualitätssteigerung am Skript beigetragen und meine Tutorin Sarah hat mir viele Fragen per E-Mail und nach dem Tutorium beantwortet. Danke!

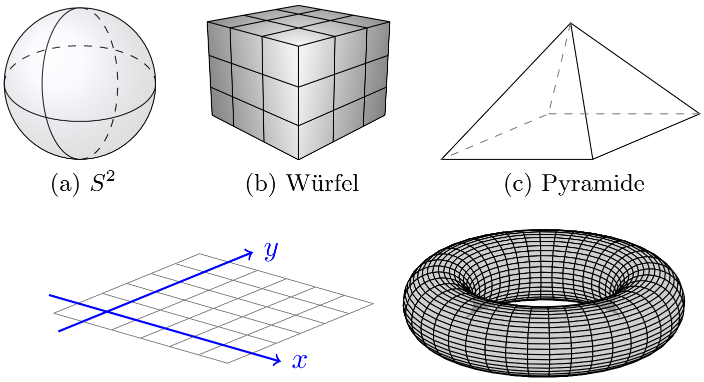
Was ist Topologie?

Die Kugeloberfläche S^2 lässt sich durch strecken, stauchen und umformen zur Würfeloberfläche oder der Oberfläche einer Pyramide verformen, aber nicht zum $\mathbb{R}^2$ oder zu einem Torus T^2. Für den $\mathbb{R}^2$ müsste man die Oberfläche unendlich ausdehnen und für einen Torus müsste man ein Loch machen.

Erforderliche Vorkenntnisse

Es wird ein sicherer Umgang mit den Quantoren $(\forall, \exists)$, Mengenschreibweisen $(\cup, \cap, \setminus, \emptyset, \mathbb{R}, \mathcal{P}(M))$ und ganz allgemein formaler Schreibweise vorausgesetzt. Auch die Beweisführung mittels Widerspruchsbeweisen sollte bekannt sein und der Umgang mit komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, deren Betrag, Folgen und Häufungspunkten nicht weiter schwer fallen. Diese Vorkenntnisse werden vor allem in „Analysis I“ vermittelt.

Außerdem wird vorausgesetzt, dass (affine) Vektorräume, Faktorräume, lineare Unabhängigkeit, der Spektralsatz und der projektive Raum $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ aus „Lineare Algebra I“ bekannt sind. In „Lineare Algebra II“ wird der Begriff der Orthonormalbasis eingeführt.



(a) S^2 (b) Würfel (c) Pyramide

(d) $\mathbb{R}^2$ (e) T^2

Abbildung 0.1: Beispiele für verschiedene Formen

Obwohl es nicht vorausgesetzt wird, könnte es von Vorteil sein „Einführung in die Algebra und Zahlentheorie“ gehört zu haben.

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Grundbegriffe

1.1 Topologische Räume

Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathfrak{T})$ bestehend aus einer Menge X und $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften

(i) $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$

(ii) Sind $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$, so ist $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$

(iii) Ist I eine Menge und $U_i \in \mathfrak{T}$ für jedes $i \in I$, so ist $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von $\mathfrak{T}$ heißen **offene Teilmengen** von X.

$A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Es gibt auch Mengen, die weder abgeschlossen, noch offen sind wie z. B. $[0, 1)$. Auch gibt es Mengen, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind.

Bemerkung 1 (Mengen, die offen & abgeschlossen sind, ex.)

Betrachte $\emptyset$ und X mit der **trivialen Topologie** $\mathfrak{T}_{\text{triv}} = \{ \emptyset, X \}$.

Es gilt: $X \in \mathfrak{T}$ und $\emptyset \in \mathfrak{T}$, d. h. X und $\emptyset$ sind offen. Außerdem $X^C = X \setminus X = \emptyset \in \mathfrak{T}$ und $X \setminus \emptyset = X \in \mathfrak{T}$, d. h. X und $\emptyset$ sind als Komplement offener Mengen abgeschlossen. ■

Beispiel 1 (Topologien)

1) $X = \mathbb{R}^n$ mit der von der euklidischen Metrik erzeugten Topologie $\mathfrak{T}_{\text{Euklid}}$:

$$\begin{aligned} U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen} \Leftrightarrow & \text{ für jedes } x \in U \text{ gibt es } r > 0, \\ & \text{sodass } \mathfrak{B}_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r \} \subseteq U \end{aligned}$$

Diese Topologie wird auch „Standardtopologie des $\mathbb{R}^n$" genannt. Sie beinhaltet unter anderem alle offenen Kugeln, aber z. B. auch Schnitte zweier Kugeln mit unterschiedlichem Mittelpunkt (vgl. Definition 1.ii).

2) Jeder metrische Raum (X, d) ist auch ein topologischer Raum.

3) Für eine Menge X heißt $\mathfrak{T}_{\text{Diskret}} = \mathcal{P}(X)$ **diskrete Topologie**.

4) $X := \mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z := \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ endlich} \} \cup \{ \emptyset \}$ heißt **Zariski-Topologie**
Beobachtungen:

- $U \in \mathfrak{T}_Z \Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{R}[X]$, sodass $\mathbb{R} \setminus U = V(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \}$
- Es gibt keine disjunkten offenen Mengen in $\mathfrak{T}_Z$.

5) $X := \mathbb{R}^n, \mathfrak{T}_Z = \{U \subseteq \mathbb{R}^n | \text{Es gibt Polynome } f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \text{ sodass } \mathbb{R}^n \setminus U = V(f_1, \dots, f_r)\}$

6) $X := \{ 0, 1 \}, \mathfrak{T} = \{ \emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 0 \} \}$ heißt **Sierpińskiraum**.
$\emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 1 \}$ sind dort alle abgeschlossenen Mengen.

Definition 2
Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$.

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von x, wenn es ein $U_0 \in \mathfrak{T}$ gibt mit $x \in U_0$ und $U_0 \subseteq U$.

Gilt eine Eigenschaft in einer Umgebung, so sagt man, dass die Eigenschaft **lokal** gilt.

Definition 3
Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge.

a) $M^\circ := \{ x \in M \mid M \text{ ist Umgebung von } x \} = \bigcup_{\substack{U \subseteq M \\ U \in \mathfrak{T}}} U$ heißt **Inneres** oder **offener Kern** von M.

b) $\overline{M} := \bigcap_{\substack{M \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ heißt **abgeschlossene Hülle** oder **Abschluss** von M.

c) $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ heißt **Rand** von M.

d) M heißt **dicht** in X, wenn $\overline{M} = X$ ist.

Beispiel 2

1) Sei $X = \mathbb{R}$ mit euklidischer Topologie und $M = \mathbb{Q}$. Dann gilt: $\overline{M} = \mathbb{R}$ und $M^\circ = \emptyset$

2) Sei $X = \mathbb{R}$ und $M = (a, b)$. Dann gilt: $\overline{M} = [a, b]$

3) Sei $X = \mathbb{R}, \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_Z$ und $M = (a, b)$. Dann gilt: $\overline{M} = \mathbb{R}$

Definition 4
Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

a) $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Basis** der Topologie $\mathfrak{T}$, wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{B}$ ist.

b) $\mathcal{S} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Subbasis** der Topologie $\mathfrak{T}$, wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Elementen aus $\mathcal{S}$ ist.

Beispiel 3 (Basis und Subbasis)

1) Jede Basis ist auch eine Subbasis, z.B.
$S = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b \}$ ist für $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie sowohl Basis als auch Subbasis.

2) Gegeben sei $X = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Topologie $\mathfrak{T}$. Dann ist

$$\mathfrak{B} = \{ B_r(x) \mid r \in \mathbb{Q}_{>0}, x \in \mathbb{Q}^n \}$$

ist eine abzählbare Basis von $\mathfrak{T}$.

3) Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum mit $X = \{ 0, 1, 2 \}$ und $\mathfrak{T} = \{ \emptyset, \{ 0 \}, \{ 0, 1 \}, \{ 0, 2 \}, X \}$.
Dann ist $\mathcal{S} = \{ \emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 0, 2 \} \}$ eine Subbasis von $\mathfrak{T}$, da gilt: